МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ТВЕРСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра физики

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО и МАГНЕТИЗМ

*Методические указания
по выполнению контрольных заданий для студентов
заочного факультета ТГТУ*

Тверь 2004

В пособии представлены требования кафедры физики по выполнению и оформлению контрольных работ для студентов заочного факультета ТГТУ, выписка из рабочей программы курса физики по разделу «Электричество и магнетизм», список рекомендуемой литературы, приведены основные законы и формулы, необходимые выполнении третей и четвертой контрольных работ, а также — примеры решения задач и справочные материалы.

Пособие обсуждено на заседании кафедры физики и рекомендован к печати (протокол № _4_ от _04.03.2004_)

Составители: Алексеев В.М., Болотов А.Н.

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ
Методические указания по выполнению контрольных заданий
для студентов заочного факультета ТГТУ

Редактор В.В. Комкова
Технический редактор Г.В. Комарова

Подписано в печать

Формат 60x84 1/16		Бумага писчая
Физ. печ. л. 3,25	Усл. печ. л. 3,03	Уч.-изд. л. 3,35
Тираж 250 экз.	Заказ № 45	Цена 25 руб.

Издательство ТГТУ
170026, Тверь, наб. Афанасия Никитина, 22

СОДЕРЖАНИЕ

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Цель настоящего пособия – оказать помощь студентам заочного факультета в выполнении контрольных заданий по разделу «Электричество и магнетизм» общего курса физики.

В соответствии с учебным планом процессе изучения раздела «Электричество и магнетизм» студенты выполняют две контрольные работы. №3 – «Электростатика и постоянный электрический ток» и №4 – «Электромагнетизм».

Задание для контрольной работы включает в себя 8 задач, выбранных случайным образом из общего банка задач. Каждый студент получает свой индивидуальный набор задач.

При выполнении контрольной работы студенту необходимо руководствоваться следующим:

1. Контрольные работы выполняются чернилами в обычной школьной тетради, на обложке которой приводятся сведения по следующему образцу:

Контрольная работа № *по физике* *Студента(ки) заочного факультета* *специальности ЭС* *Иванова(ой) П.М.* *Номер зачетной книжки 000124* *Адрес: г. Удомля, ул. Советская 4, кв.*

2. Листок контрольного задания, заверенный секретарем кафедры, приклеивается на первой странице своей работы. Условие задачи переписывать не нужно. Следует ограничиться записью «Дано:» в сокращенной форме. Каждую задачу рекомендуется начинать с новой страницы. Для замечаний преподавателя на страницах тетради оставляются поля шириной 4 см.

3. Решение задачи должно сопровождаться кратким текстовым пояснением, раскрывающим физический смысл процесса указанного в задаче, применяемых в решении физических законов и каждой величины, входящей в формулы. Пояснения студента не должны быть более краткими, чем пояснения данные в примерах решения задачи. Рекомендуется весь ход решения задачи с необходимыми преобразованиями формул провести в аналитическом виде до окончательной расчетной формулы. Следует убедится в пра-

вильности расчетной формулы методом анализа наименований физических величин, сделать подстановку и вычисление, рекомендуется использовать СИ. При подстановке числовых данных в расчетные формулы целесообразно опустить размерности. Результат расчета должен обязательно сопровождаться указанием размерности. Решение задачи при необходимости следует пояснять схемой, или графиком которые выполняются аккуратно карандашом с использованием тех же обозначений, что и в тексте решения задачи.

4. В конце контрольной работы указывается, каким учебником или учебным пособием студент пользовался при изучении физики (название учебника, автор, год издания). Это делается для того, чтобы рецензент в случае необходимости мог указать, что следует студенту изучить для завершения контрольной работы.

5. Выполненную контрольную работу студент высылает по адресу деканата ФЗВО ТГТУ или приносит туда лично не позднее чем за 10 дней до начала сессии.

6. Если работа не зачтена, студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования рецензента и представить работу на повторное рецензирование. Доработка выполняется в той же тетради, где находится задачи, решения которых оказались неверными. Если характер доработки требует выполнения всей работы заново, то исправленную работу необходимо выслать вместе с незачтенной.

7. Зачтенные контрольные работы предъявляются экзаменатору. *Студенты с незачтенными контрольными работами к экзамену не допускаются.* Во время экзамена студент должен быть готов дать пояснения по существу решения задач, входящих в контрольные работы.

8. Если в процессе изучения теоретического материала и при решении задач у студента возникают вопросы, на которые он не может найти ответа, он должен обратиться на кафедру физики ТГТУ или на учебно-консультационный пункт (УКП).

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ
(*Рабочая программа)*

Электрическое поле в вакууме. Электрические свойства тел. Элементарный заряд. Закон сохранения электрического за. ряда. Закон Кулона. Электрическая постоянная. Электрическое поле. Напряженность поля. Принцип суперпозиции полей. Силовые линии поля. Поток вектора напряженности. Теорема Остроградского— Гаусса. Вычисление напряженности поля различных заряженных тел.

Работа сил электрического поля при перемещении зарядов. Циркуляция вектора напряженности. Потенциал. Связь между напряженностью электрического поля и потенциалом. Потенциал поля точечного заряда. Электрическое поле внутри заряженного проводника. Распределение зарядов в проводниках,

Проводники в электрическом поле. Энергия электрического поля. Проводники в электрическом поле. Электроемкость проводников. Конденсаторы. Соединение конденсаторов. Энергия системы зарядов. Энергия заряженного проводника. Энергия заряженного конденсатора. Энергия электростатического поля. Объемная плотность энергии.

Электрическое поле в диэлектриках. Свободные и связанные заряды. Электрический диполь. Электрический момент диполя. Диполь в однородном электрическом поле. Полярные и неполярные молекулы. Поляризация диэлектриков. Поляризованность (вектор поляризации). Электрическое смещение.

Постоянный электрический ток. Электрический ток. Сила тока. Плотность тока. Закон Ома для участка цепи. Сопротивление проводников. Источники тока. Электродвижущая сила (э. д. с.). Закон Ома для полной цепи. Закон Ома для участка цепи, содержащего э. д. с. Разветвленные цепи. Законы Кирхгофа. Работа и мощность тока. Закон Джоуля—Ленца.

Классическая теория электропроводности металлов. Контактные явления. Элементарная классическая теория электропроводности металлов. Объяснение закона Ома и Джоуля—Ленца на основе этой теории. Границы применимости закона Ома.

Электрический ток в газах. Механизм ионизации и рекомбинации. Потенциал ионизации. Движение электронов и ионов в газе под действием внешнего электрического поля. Ударная ионизация и образование электрических лавин. Несамостоятельный и самостоятельный газовые разряды. Искровой, тлеющий и коронный разряды. Газоразрядная плазма.

Магнитное поле в вакууме. Магнитное взаимодействие токов. Магнитное поле. Закон Ампера. Магнитная индукция. Силовые линии магнитного поля. Магнитная постоянная. Магнитное поле движущихся зарядов. Сила Лоренца.

Магнитное поле постоянных токов. Закон Био—Савара—Лапласа для элемента тока. Поле прямолинейного и кругового токов. Магнитный момент кругового тока. Циркуляция вектора магнитной индукции. Магнитное поле соленоида. Магнитный поток. Работа перемещения контура с током в магнитном поле.

Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях. Движение заряженных частиц в однородном магнитном поле. Эффект Холла. Отклонение движущихся заряженных частиц электрическим и магнитным полями. Масс-спектрометры. Ускорение заряженных частиц. Элементы электронной оптики.

Магнитное поле в веществе. Взаимодействие магнитного поля с веществом. Понятие об элементарных токах. Элементарный ток в магнитном поле. Намагничивание вещества. Намагниченность. Магнитная восприимчивость. Магнитная проницаемость. Напряженность магнитного поля.

Магнетики. Деление веществ на диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики. Диамагнетизм. Парамагнетизм. Зависимость магнитной восприимчивости от температуры. Ферромагнетизм. Домены. Гистерезис. Точка Кюри.

Электромагнитная индукция. Возникновение электрического поля при изменении магнитного поля. Индукционный ток. Правило Ленца. Э. д. с. индукции. Закон электромагнитной индукции Фарадея. Явление самоиндукции. Индуктивность. Энергия магнитного поля соленоида. Плотность энергии магнитного поля. Взаимная индукция.

Электромагнитные колебания. Переменный ток, Индуктивность и емкость в цепи переменного тока. Колебательный контур. Основное уравнение колебательного контура. Собственные колебания контура. Формула Томсона. Реактивное сопротивление в цепи переменного тока. Затухающие колебания. Уравнение для затухающих колебаний.

Уравнения Максвелла. Основные экспериментальные соотношения, используемые при написании уравнений Максвелла. Уравнение Максвелла для стационарных полей. Обобщение закона электромагнитной индукции Фарадея. Ток смещения. Система уравнений Максвелла в интегральной форме для произвольных полей.

Электромагнитные волны. Волновое уравнение. Плоская электромагнитная волна. Скорость распространения электромагнитных волн. Энергия и импульс электромагнитного поля. Вектор Умова—Пойнтинга. Экспериментальное исследование электромагнитных волн. Шкала электромагнитных волн.

Единицы электрических и магнитных величин. Международная система единиц (СИ). Соотношения, используемые при построении системы электромагнитных единиц. Определение единицы силы тока в СИ.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Геворкян Р.Г. Курс физики: Учебн. пособие. М.: Высш. школа, 1979.

Детлаф А.А. и др. Курс физики: Т. 2. М.: Высш. школа, 1979.

Зисман Г. А., Тодес О. М. Курс общей физики. Т. 2. М., 1972—1974.

Савельев И. В. Курс общей физики. Т. 2. М., 1970—1979.

Трофимова Т.И. Курс физики: Учебн. пособие для вузов. - 2-е изд. М.: Высш. школа., 1990.

Волькенштейн В. С. Сборник задач по общему курсу физики, М„ 1980.

Чертов А. Г., Воробьев А. А. Задачник по физике. М., 1981.

Чертов А. Г. Единицы физических величин, М., 1977.

ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ПОСТОЯННЫЙ ТОК.

Основные законы и формулы.

• Закон Кулона:

$$F = q_1 q_2 / 4\pi\varepsilon_o \varepsilon r^2$$

где F – сила взаимодействия точечных зарядов q_1 и q_2 расположенных на расстоянии r (Рис.1); εо = 8,85·10 – 12 Ф/м – электрическая постоянная, ε – диэлектрическая среды: величина, показывающая во сколько раз сила взаимодействия в среде меньше, чем в вакууме. В вакууме и в воздухе $\varepsilon = 1$.

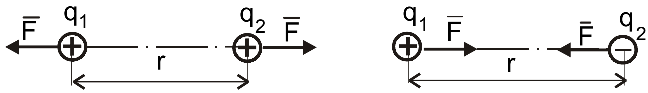


Рис. 1.

• Напряженность электрического поля и потенциал:

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}}{Q}; \ \varphi = \frac{П}{Q},$$

где $П$ – потенциальная энергия точечного положительного заряда Q, находящегося в данной точке поля (при условии, что потенциальная энергия заряда, удаленного в бесконечность, равна нулю).

• Сила, действующая на точечный заряд, находящийся в электрическом поле, и потенциальная энергия этого заряда:

$$\vec{F} = \vec{E} \cdot Q; \ П = \varphi \cdot Q,$$

• Напряженность и потенциал поля, создаваемого системой точечных зарядов (принцип суперпозиции электрических полей):

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i \ ; \ \varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i .$$

где φi, Ei – напряженность и потенциал в данной точке поля, создаваемого i – м зарядом.

$$E = \frac{\cdot q}{4\pi\varepsilon_o \varepsilon \cdot r^2}, \ \varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon \cdot r},$$

где r – расстояние от заряда q до точки, в которой определяются напряженность и потенциал.

• Напряженность и потенциал поля, создаваемого проводящей заряженной сферой радиуса R на расстоянии r от центра сферы:

а) если $r < R$, то $E = 0$; $\varphi = Q/4\pi\varepsilon_o\varepsilon r$.

б) если $r = R$, то $E = Q/4\pi\varepsilon_o\varepsilon R^2$, $\varphi = Q/4\pi\varepsilon_o\varepsilon R$.

в) если $r > R$, то $E = Q/4\pi\varepsilon_o\varepsilon r^2$, $\varphi = Q/4\pi\varepsilon_o\varepsilon r$

где Q – заряд сферы.

• Линейная плотность заряда (заряд, приходящийся на единицу длины заряженного тела)

$$\tau = \frac{Q}{l}.$$

• Поверхностная плотность заряда (заряд, приходящийся на единицу площади поверхности заряженного тела)

$$\sigma = \frac{Q}{S}.l$$

• Напряженность и потенциал поля, создаваемого распределенными зарядами. Если заряд равномерно распределен вдоль линии с линейной плотностью τ, то на линии выделяется малый участок длины dl с зарядом $dQ = \tau \cdot dl$. Такой заряд можно рассматривать как точечный. Напряженность $d\vec{E}$ и потенциал $d\varphi$ электрического поля, создаваемого зарядом dQ, определяется формулами:

$$d\vec{E} = \frac{\tau \cdot dl}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}; \; d\varphi = \frac{\tau \cdot dl}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon r}.$$

где $\vec{r}$ – радиус – вектор, направленный от выделенного элемента dl к точке, в которой вычисляется напряженность. Используя принцип суперпозиции электрических полей, находим интегрированием напряженность $\vec{E}$ и потенциал φ поля, создаваемого распределенным зарядом.

$$\vec{E} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon} \int_l \frac{dl}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}; \; \varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon} \int_l \frac{dl}{r}$$

Интегрирование ведется вдоль всей длины l заряженной линия (см. *пример 2*).

• Напряженность поля, создаваемого бесконечной прямой равномерно заряженной линией или бесконечно длинным цилиндром:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_o\varepsilon r}.$$

где r – расстояние от нити или оси цилиндра до точки, напряженность поля в которой вычисляется.

• Напряженность поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o\varepsilon}.$$

• Связь напряженности с потенциалом:

а) в общем случае

$$\vec{E} = -grad\varphi, \text{ или } \vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$$

б) в случае однородного поля

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d};$$

в) в случае поля, обладающего центральной или осевой симметрией

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}.$$

• Электрический момент диполя (дипольный момент)

$$\vec{p} = Q \cdot \vec{l}.$$

где Q – заряд; $\vec{l}$ – плечо диполя (величина векторная, направленная от отрицательного заряда к положительному и численно равная расстоянию между зарядами).

• Работа сил поля по перемещению заряда Q из точки поля с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2:

$$A_{12} = Q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2).$$

• Электроемкость

$$C = Q/\varphi \text{ или } C = Q/U,$$

где φ – потенциал проводника (при условии, что в бесконечности потенциал проводника принимается равным нулю); U – разность. потенциалов пластин конденсатора.

• Электроемкость уединенной проводящей сферы радиуса R

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R.$$

• Электроемкость плоского конденсатора;

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

где S – площадь пластины (одной) конденсатора; d – расстояние между пластинами.

• Электроемкость батареи конденсаторов:

а) при последовательном соединении

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_N}$$

б) при параллельном соединении

$$C = C_1 + C_2 + \ldots C_N.$$

где N – число конденсаторов в батарее.

• Энергия заряженного конденсатора:

$$W = \frac{q \cdot U}{2} = \frac{C \cdot U^2}{2} = \frac{q^2}{2 \cdot C}$$

Для уединенного конденсатора $W = q2/(2 \cdot C)$ для конденсатора, присоединенного к источнику напряжения $W = C \cdot U2/2$.

• Сила тока:

$$I = \frac{dq}{dt} .$$

где dq – заряд, прошедший через поперечное сечение проводника за время dt.

• Плотность тока:

$$j = \frac{dI}{dt} .$$

где S – площадь поперечного сечения проводника.

• Связь плотности тока со средней скоростью $<v>$ направленного движения заряженных частиц:

$$j = q \cdot n \cdot <v>,$$

где q – заряд частицы; n – концентрация заряженных частиц.

• Закон Ома:

а) для участка цепи, не содержащего э. д. с,,

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r} = \frac{U}{R}$$

где $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ – разность потенциалов (напряжение) на концах участка цепи; r – сопротивление участка;

б) для участка цепи, содержащего э. д. с.,

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) \pm \varepsilon}{r}$$

где ε – э. д. с. источника тока; r – полное сопротивление участка (сумма внешних и внутренних сопротивлении):

в) для замкнутой (полной) цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

где R – внешнее сопротивление цепи; r – внутреннее сопротивление цепи.

• Законы Кирхгофа;

а) первый закон

$$\Sigma I_i = 0 ,$$

где $\sum I_i$ – алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле;

б) второй закон

$$\sum I_i R_i = \sum \varepsilon_i ,$$

где $\sum I_i R_i$ – алгебраическая сумма произведений сил токов на сопротивления участков в произвольном замкнутом контуре; $\sum \varepsilon_i$ – алгебраическая сумма э.д.с. в этом контуре.

• Сопротивление R и проводимость G проводника:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \qquad G = \sigma \frac{S}{l}$$

где ρ – удельное сопротивление; l – длина проводника; S – – площадь поперечного сечения проводника. σ – удельная проводимость.

• Сопротивление системы проводников:

а) при последовательном соединении

$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n;$$

б) при параллельном соединении

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n},$$

где R_i, – сопротивление i – го проводника.

• Работа тока:

$$A = I \cdot U \cdot t = I^2 \cdot R \cdot t = U^2/R \cdot t.$$

Первая формула справедлива для любого участка цепи, на концах которого поддерживается напряжение U, последние две – для участка, не содержащего э. д. с.

• Мощность тока

$$P = I \cdot U = I^2 \cdot R = U^2/R, '$$

• Закон Джоуля – Ленца:

$$dQ. = I^2 r \cdot dt.$$

• Закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}.$$

где σ – удельная проводимость, $\vec{E}$ – напряженность электрического поля; $\vec{j}$ – плотность тока.

• Связь удельной проводимости с подвижностью b заряженных частиц (ионов):

$$\sigma = q \cdot n \cdot (b^+ + b^-),$$

где q – заряд иона; n – концентрация ионов, b^+ и b^- – подвижности положительных и отрицательных ионов.

Примеры решения задач.

Пример 1. *Два точечных заряда $Q_1 = 9Q$ и $Q_2 = -Q$ закреплены на расстоянии a = 10 см друг от друга. Третий заряд q может перемещаться только вдоль прямой, проходящей через заряды. Определить положение заряда q, при котором он будет находиться в равновесии.*

Решение

Заряд q будет находиться в равновесии в том случае, если геометрическая сумма сил, действующих на него, будет равна нулю. Это значит, что на заряд q должны действовать две силы, равные по величине и противоположные по направлению. Как следует из рис. 2 это возможно, если заряд q находится участках *I* и *Ш* прямой, проходящей через центры зарядов Q_1 и Q_2. Тогда для точек с координатами и первого и третьего участков можно записать

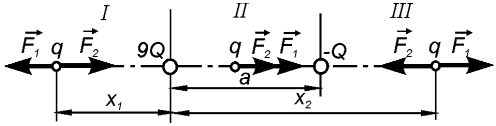


Рис. 2.

$$F_{1I} = F_{2I}, \qquad F_{1Ш} = F_{2Ш}, \qquad (1)$$

где $F_{1I} = F_{2I}$ - сила взаимодействия между зарядами q и Q_1 , $F_{1Ш} = F_{2Ш}$ - сила взаимодействия между зарядами q и Q_2 на первом и третьем участках.

Согласно закону Кулона

$$F_1 = qQ_2/4\pi\varepsilon_o r_1^2 \ \ и \ \ F_2 = Q_1q/4\pi\varepsilon_o r_2^2 .$$

Из чертежа: для участка *II* $r_1 = x_1,\ r_2 = x_1 + a$, для участка *Ш* $r_1 = x_2,\ r_2 = x_2 - a$. Тогда

$$9Qq/4\pi\varepsilon_o x_1^2 = qQ/4\pi\varepsilon_o(x_1 + a)^2 \ \ и \ \ qQ/4\pi\varepsilon_o(x_2 - a)^2 = 9Qq/4\pi\varepsilon_o x_2^2 .$$

Откуда $x_1 = -1{,}5a$, $x_2 = 1{,}5a$.

Подставляя исходные данные получим $x_1 = -15$ *см* , $x_2 = 15$ *см*.

Ответ: заряд будет находиться в равновесии в точках $x_1 = -15$ *см* , $x_2 = 15$ *см*.

Пример 2. *Тонкий стержень длиной* $b = 20$ *см несет равномерно распределенный заряд. На продолжении оси стержня на расстоянии* $a = 10$ *см от ближайшего конца находится точечный заряд* $Q = 40$ *нКл, который взаимодействует со стержнем с силой* $F = 6$ *мкН. Определить линейную плотность* τ *заряда на стержне.*

Решение.

Выделим на стержне (рис. 3), на расстоянии r от заряда Q, элементарный участок dr с зарядом $dq = \tau{\cdot}dr$. Этот заряд можно рассматривать как точечный. Тогда, согласно закону Кулона на заряд Q будет действовать сила

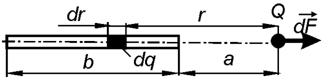


Рис. 3.

$$dF = \frac{kQ\tau dr}{r^2} . \qquad (1)$$

Так как силы dF от всех элементарных зарядов имеют одинаковое направление, силу, действующую на заряд Q со стороны стержня можно найти как интеграл от выражения (1) в пределах от a до $a+b$, т. е.

$$F = \int_a^{a+b} \frac{kq\tau dr}{r^2} = -\frac{kQ\tau}{r}\Big|_a^{a+b} = \frac{kQ\tau}{r}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b}\right) = \frac{kQ\tau b}{a(a+b)},$$

откуда

$$\tau = \frac{a(a+b)\cdot F}{kQb}.$$

Подставляя исходные данные, получим

$$\tau = \frac{0.1\cdot(0{,}1+0{,}2)\cdot 6\cdot 10^{-6}}{9\cdot 10^{9}\cdot 4\cdot 10^{-8}\cdot 0{,}2} = 2{,}5\cdot 10^{-9}\ Кл = 2{,}5\ нКл/м.$$

Ответ: линейная плотность заряда на стержне равна 2,5 нКл/м.

Пример 3. *Точечный заряд Q = 25 нКл находится в поле, созданном прямым бесконечным цилиндром радиуса R = 1 см, равномерно заряженным с поверхностной плотностью σ = 0,2 нКл/см^2. Определить силу F, действующую на заряд, если его расстояние от оси цилиндра r = 10 см.*

Решение.

По определению:

сила, действующая на точечный заряд Q, находящийся в электростатическом поле

$$F = Q\cdot E, \tag{1}$$

где E — напряженность поля;

напряженность поля бесконечно длинного равномерно заряженного цилиндра

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_o r}. \tag{2}$$

где τ — линейная плотность заряда.

Выразим линейную плотность τ через поверхностную плотность σ. Для этого выделим элемент цилиндра единичной длины и выразим находящийся на нем заряд Q двумя способами: $Q = \sigma\cdot S = \sigma 2\pi R$, $Q = \tau$. Приравняв правые части этих равенств, получим $\tau = \sigma 2\pi R$. С учетом этого формула (2) примет вид

$$E = \frac{R\sigma}{2\varepsilon_o r}. \tag{3}$$

Тогда сила, действующая на точечный заряд

$$F = \frac{QR\sigma}{2\varepsilon_o r}. \tag{4}$$

Подставляя исходные данные и произведя вычисления, получим

$$F = \frac{2{,}5\cdot 10^{-8}\cdot 2\cdot 10^{-6}\cdot 10^{-2}}{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}1} = 5{,}65\cdot 10^{-4}\ Н = 565\ мкН.$$

Ответ: сила, действующая на заряд, F = 565 мкН. Направление силы. F совпадает с направлением напряженности E, а последняя в силу симметрии (цилиндр бесконечно длинный) направлена перпендикулярно поверхности цилиндра.

Пример 4. *По тонкой нити, изогнутой по дуге окружности, равномерно распределен заряд с линейной плотностью τ = 10 нКл/м. Определить напряженность* **E** *и потенциал φ электрического поля, создаваемого таким распределенным зарядом в точке, совпадающей с центром кривизны дуги. Длина l нити составляет одну треть длины окружности и равна 15 см.*

Решение.

Выберем оси координат так, чтобы начало координат совпадало с центром кривизны дуги, а ось у была бы симметрично расположена относительно концов дуга (рис. 4). На нити выделим элемент длины dl. Заряд $dQ = \tau \cdot dl$, находящийся на выделенном участке, можно считать точечным. Напряженности электрического поля в точке 0, создаваемого зарядом dQ равна

$$d\vec{E} = \frac{\tau \cdot dl}{4\pi\varepsilon_o r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r};$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор, направленный от элемента dl к точке, напряженность которой вычисляется.

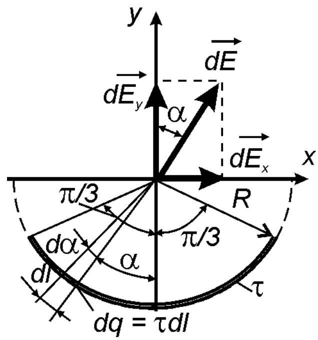


Рис. 4

Выразим вектор $d\vec{E}$ через проекции dE_x и dE_y на оси координат:

$$d\vec{E} = \vec{i}\ dE_x + \vec{j} \cdot dE_y,$$

где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — единичные векторы направлений (орты).

Напряженность $\vec{E}$ найдем как интеграл

$$\vec{E} = \int_l d\vec{E} = \vec{i} \cdot \int_l dE_x + \vec{j} \cdot \int_l dE_y .$$

Интегрирование ведется вдоль дуга длины l. В силу симметрии интеграл $\int_l dE_x$, равен нулю. Тогда

$$\vec{E} = \vec{j} \cdot \int_l dE_y , \qquad (1)$$

где $dE_y = dE \cdot cos\alpha = \tau \cdot dl cos\alpha/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$

Так как $r = R = const,\ dl = R \cdot d\alpha$, то

$$dE_y = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_o R} cos\,\alpha \cdot d\alpha.$$

Подставим найденное значение dE_y в выражение (1) и, приняв во внимание симметричное расположение дуги относительно оси у, пределы интегрирования возьмем от 0 до π/3, а результат удвоим:

$$\vec{E} = \frac{2\tau}{4\pi\varepsilon_o R}\int\limits_0^{\pi/3}\cos\alpha\cdot d\alpha = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_o R}\sin\alpha\Big|_0^{\pi/3} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_o R}\sqrt{3}.$$

По определению длина дуги $l = 2\pi R/3$. Откуда $R = 3\cdot l/2\pi$. Тогда

$$\vec{E} = \frac{\tau}{6\varepsilon_o l}\sqrt{3}.$$

Из этой формулы видно, что вектор $\vec{E}$ совпадает с положительным направлением оси y.

Потенциал электрического поля, создаваемый точечным зарядом dQ в точке 0:

$$d\varphi = \frac{\tau\cdot dl}{4\pi\varepsilon_o r}.$$

Откуда, с учетом $r = R$ и $R = 3\cdot l/2\pi$.

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_o R}\int\limits_0^l dl = \frac{\tau\cdot l}{4\pi\varepsilon_o R} = \frac{\tau}{6\varepsilon_o}.$$

Подставив исходные данные, и, произведя вычисления, для напряженности и потенциала в т. О получим:

$$E = \frac{10^{-8}\cdot 1{,}73}{6\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}15} = 2{,}18\ кВ/м.$$

$$\varphi = \frac{10^{-8}}{6\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}} = 188\ В.$$

Ответ: напряженность и потенциал электрического поля соответственно равны 2,18 кВ/м и 188 В

Пример 5. *На пластинах плоского конденсатора находится заряд Q = 10 нКл. Площадь S каждой пластины конденсатора равна 100 см^2, диэлектрик—воздух. Определить силу F, с которой притягиваются пластины. Поле между пластинами считать однородным.*

Решение.

Любой элемент одной пластины площадью ΔS, несущий заряд $\Delta q = \sigma\cdot\Delta S$ находится в поле напряженностью E_2, созданном зарядом другой пластины конденсатора. Следовательно, на каждый заряд Δq действует сила (рис. 5)

$$\Delta F = \Delta q\cdot E = \sigma\cdot E\cdot\Delta S, \qquad (1)$$

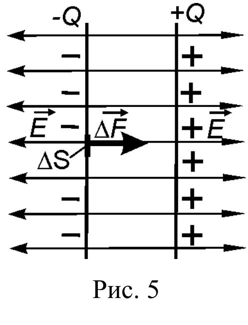


Рис. 5

где $\sigma = Q_1/S$ – поверхностная плотность заряда первой пластины, $\cdot\Delta S = S/N$, N – число разбиений

Так как все элементарные силы параллельны и равны по величине, то сила, действующая на пластину равна

$$F = \Delta F \cdot N = \sigma \cdot E \cdot \Delta S \cdot N \cdot S/N = Q \cdot E_2.$$

По определению напряженность электростатического поля бесконечной пластины

$$E_2 = \frac{Q}{2\varepsilon_o S}.$$

Тогда

$$F = Q^2/2e_0S$$

Подставив числовые значения величин, и произведя вычисления, получим

$$F = \frac{10^{-16}}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}} = 5{,}65 \cdot 10^{-4}\ Н = 565\ мкН.$$

Ответ: пластины притягиваются с силой 565 мкН.

Пример 6. *Две концентрические проводящие сферы радиусами R_1 = 6см и R_2 = 10 см несут соответственно заряды Q_1 = 1нКл и Q_2= – 0,5 нКл. Найти напряженность поля в точках, отстоящих от центра сфер на расстояниях r_1 = 5 см, r_2 = 9 см, r_3 =15 см. Построить график E(r).*

Решение.

Сферы делят окружающее пространство на три области (рис. 6): область *I* – ($r < R_1$), область *II* – ($R_1 < r < R_2$), область *III* – ($r > R_2$).

Для определения напряженности E_1 в области *I* проведем гауссову поверхность S_1 радиусом $r = r_1$ и воспользуемся теоремой Остроградского—Гаусса:

$$\oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_o}\sum_{i=1}^{N} Q_i$$

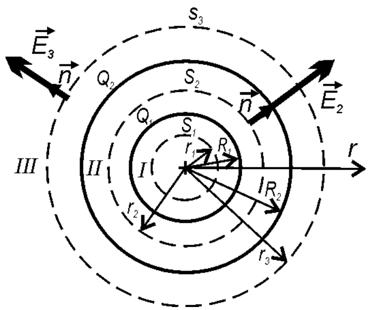


Рис. 6.

Суммарный заряд, находящийся внутри гауссовой поверхности $\sum_{i=1}^{N} Q_i$ = 0. Из соображений симметрии $E_n = E_1 = const$. Следовательно, $\oint_S E_n dS$ = 0 и E_1 (напряженность поля в области *I*) во всех точках, удовлетворяющих условию $r_1 < .R_1$, будет равна нулю.

В области *II* проведем гауссову поверхность радиусом $r = r_2$. В этом случае внутри гауссовой поверхности находится только заряд Q_1, и согласно теореме Остроградского—Гаусса

$$\oint_S E_n dS = Q_1/\varepsilon_0,$$

Так как $E_n = E_2 = const$, то E_2 можно вынести за знак интеграла

$$E_2 \cdot \oint_S dS = Q_1/\varepsilon_0, \text{ или } E_2 \cdot S_2 = Q_1/\varepsilon_0.$$

Учитывая, что $S_2 = 4 \cdot \pi \cdot r_2^2$ как площадь сферической поверхности для напряженности E_2 в области *II* получим

$$E_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o r_2^2}. \qquad (1)$$

В области *III* построим гауссову поверхность радиусом $r = r_3$ с площадью поверхности $S_2 = 4 \cdot \pi \cdot r_3^2$. Учитывая, что и в этой области в силу симметрии $E_n = E_3 = const$, а гауссова поверхность охватывает обе сферы и, следовательно, суммарный заряд будет равен Q_1 - Q_2 для напряженности E_3 в области *III* получим

$$E_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_o r_3^2}. \qquad (2)$$

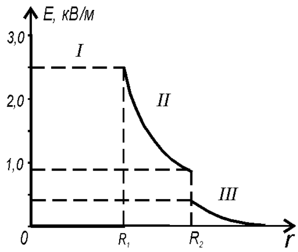


Рис. 7.

Подставив числовые значения исходных величин с учетом того, что $1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9 м/Ф$ и, произведя вычисления, получим

$$E_2 = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-9}}{(0{,}09)^2} = 1{,}11 \text{ кВ/м}. \qquad (3)$$

$$E_3 = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(1 - 0{,}5) \cdot 10^{-9}}{(0{,}15)^2} = 200 \text{ В/м}. \qquad (4)$$

График зависимости $E(r)$ представлен на рис. 7.

Ответ: напряженность поля в заданных точках равна 0, 1,11 кВ/м 200 В/м

Пример 7. *Электрическое поле создается двумя зарядами $Q_1 = 4$ мкКл и $Q_2 = — 2$ мкКл, находящимися на расстоянии а = 0,1 м друг от друга. Определить работу A_{12} сил поля по перемещению заряда Q = 50 нКл из точки 1 в точку 2 (рис. 8).*

Решение.

По определению работа сил поля по перемещению заряда в электростатическом поле

$$A_{12} = Q \cdot (\varphi_1 — \varphi_2).$$

Согласно принципу суперпозиции электрических полей, потенциалы φ_1 и φ_2 точек 1 и 2 поля зарядов Q_l и Q_2 соответственно равны

$$\varphi_1 = \varphi_{11} + \varphi_{12}$$

$$\varphi_2 = \varphi 2_1 + \varphi_{22}$$

По определению потенциала поля точечного заряда

$$\varphi_{11} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon \cdot a/2}, \quad \varphi_{12} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon \cdot a/2},$$

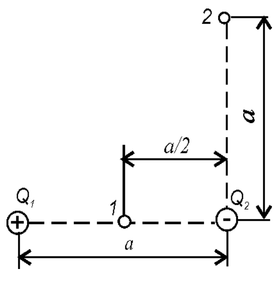


Рис. 8

$$\varphi_{21} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\sqrt{2}\cdot a}, \quad \varphi_{22} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\cdot a},$$

Тогда

$$\varphi_1 = \frac{2(Q_1 + Q_2)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\cdot a}, \qquad \varphi_2 = \frac{Q_1/\sqrt{2} + Q_2)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\cdot a}.$$

и

$$A_{12} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\cdot a}\cdot[2(Q_1 + Q_2) - (Q_1/\sqrt{2} + Q_2)].$$

или

$$A_{12} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\cdot a}\cdot[Q_1(2 - 1/\sqrt{2}) + Q_2].$$

Подставив числовые значения физических величин с учетом того, что $1/(4\pi\varepsilon_0) = 9\cdot10^9$ м/Ф, и, произведя вычисления, получим

$$A_{12} = \frac{50\cdot10^{-9}\cdot 9\cdot10^{9}}{0{,}1}\cdot[4\cdot(2 - 1/\sqrt{2}) - 2]\cdot10^{-6} = 14{,}3 \text{ Дж}.$$

Ответ: работа сил поля по перемещению заряда равна 14,3 Дж.

Пример 8. *Электрическое поле создано длинным цилиндром радиусом R = 1 см, равномерно заряженным с линейной плотностью τ = 20 нКл/м. Определить разность потенциалов двух точек этого поля, находящихся на расстоянии r1= 0,5 см и r2= 2 см от поверхности цилиндра, в средней его части.*

Решение.

Из связи между напряженностью поля и изменением потенциала:

$$E = -\frac{d\varphi}{dr},$$

имеем

$$\Delta\varphi = -\int_{r_1}^{r_2} E\cdot dr$$

По определению напряженность поля бесконечно длинного цилиндра:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_o\varepsilon r}.$$

Тогда

$$|\Delta\varphi| = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\frac{r_2}{r_1}$$

Подставив числовые значения физических величин, и, произведя вычисления, получим

$$|\Delta\varphi| = 2\cdot10^{-8}\cdot1{,}8\cdot10^{10}\cdot\ln(3/1{,}5) = 3{,}6\cdot10^{2}\cdot2{,}3\cdot\lg2 = 250 \text{ В}.$$

Ответ: разность потенциалов $|\Delta\varphi|$ = 250 В.

Пример 9. *Определить ускоряющую разность потенциалов U, которую должен пройти в электрическом поле электрон, обладающий скоростью v = 10* м/с, чтобы скорость его возросла в 2 раза.*

Решение.

По теореме о кинетической энергии

$$A = W_2 - W_1 = mv_2^2/2 - mv_1^2/2 \qquad (1)$$

где A – работа сил электростатического поля, W_2 и W_1 — кинетические энергии электрона до и после прохождения ускоряющего поля: m—масса электрона; v_1 и v_2 — начальная и конечная скорости его.

Работа сил электростатического поля определяется произведением заряда электрона e на разность потенциалов U

$$A = eU.$$

Тогда

$$eU = mv_2^2/2 - mv_1^2/2 \qquad (2)$$

Учитывая, что по условию задачи v2 = 2·v1 для ускоряющей разности потенциалов имеем

$$U = (4 \cdot mv_1^2/2 - mv_1^2/2)/e = 3 \cdot mv_1^2/2e\ .$$

Подставив числовые значения физических величин, и, произведя вычисления, получим

$$U = 3 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot (10^6)/2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 8{,}53\ В.$$

Ответ: ускоряющая разность потенциалов U = 8,53 В.

Пример 10. *Электрон влетает в пространство между пластинами плоского конденсатора параллельно пластинам и отклоняется на угол 5°. Длина пластин конденсатора 10 см, расстояние между ними 2 см, напряжение между пластинами 50 В. Какова скорость электрона на входе в конденсатор?*

Решение

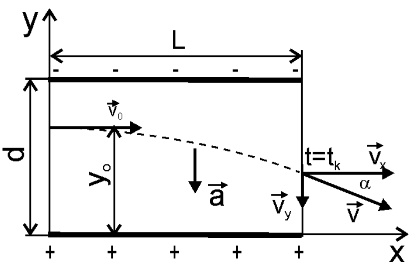


Рис. 9

Движение электрона между пластинами заряженного конденсатора подобно движению тела, брошенного горизонтально, поэтому вдоль пластин (ось x) электрон движется равномерно со скоростью $\vec{v}_0$ и закон его движения имеет вид $x = v_o \cdot t$.

В направлении перпендикулярном пластинам (ось y рис. 9) равноускоренно со скоростью $v_y = - a \cdot t$, где $a = \dfrac{F_{эл}}{m_e} = \dfrac{eU}{m_e \cdot d}$.– ускорение, которое приобретает электрон под действием сил электрического поля конденсатора.

В момент вылета из конденсатора при $t = t_к$ $x = L$, $|v_y| = a \cdot t$. Тогда

$$L = v_o \cdot t_к \ (1) \quad и \quad |v_y| = \frac{eU \cdot t_к}{m_e \cdot d} \qquad (2)$$

Из треугольника скоростей $|v_y| = v_o \cdot tg\alpha$ (3).

Откуда, с учетом (1) и (2) $v_o = \sqrt{\dfrac{e \cdot U \cdot L}{m_e \cdot d \cdot tg\alpha}}$

Подставляя исходные данные, получим

$$v_0 = \sqrt{\frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 50 \cdot 0.1}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 0{,}02 \cdot tg\ 5^o}} = 22{,}4 \cdot 10^6 \ м/с.$$

Ответ: скорость электрона на входе в конденсатор $v_0 = 22{,}4 \cdot 10^6$ м/с.

Пример 11. *Плоский воздушный конденсатор, расстояние между пластинами которого 5 мм, заряжен до 200 В и отключен от источника напряжения. Каким будет напряжение на конденсаторе, если его пластины раздвинуть до расстояния 10 мм?*

Решение

Система является изолированной, поэтому в соответствии с законом сохранения заряда заряд конденсатора при изменении его емкости меняться не будет, то есть $q_1 = q_2$, где q_1, q_2 - заряды конденсатора до и после раздвижения пластин.

Из определения емкости конденсатора $q_1 = C_1 \cdot U_1$ и $q_2 = C_2 \cdot U_2$, где емкости C_1 и C_2 рассчитываются по формулам

$$C_1 = \frac{\varepsilon_o S}{d_1} \ и \ C_2 = \frac{\varepsilon_o S}{d_2}.$$

Тогда $\dfrac{\varepsilon_o S \cdot U_1}{d_1} = \dfrac{\varepsilon_o S \cdot U_2}{d_2}$, откуда $U_2 = \dfrac{d_2 \cdot U_1}{d_1} = \dfrac{0{,}010 \cdot 200}{0{,}005} = 400$ В.

Ответ: напряжение на конденсаторе равно 400 В.

Пример 12. *Конденсатор емкостью C_1 = 3 мкФ был заряжен до разности потенциалов U_1 = 40 В. После отключения от источника тока конденсатор был соединен параллельно с другим незаряженным конденсатором емкостью C_2 = 5 мкФ. Какая энергия W израсходуется на образование искры в момент присоединения второго конденсатора?*

Решение.

Энергия W, израсходованная на образование искры,

$$W = W_1 - W_2, \qquad (1).$$

где W_1 — энергия, которой обладал первый конденсатор до присоединения к нему второго конденсатора; $W2$ —энергия, которую имеет батарея, составленная из первого и второго конденсаторов. Энергия заряженного конденсатора определяется по формуле

$$W = \frac{C \cdot U^2}{2} \qquad (2)$$

где C — емкость конденсатора или батареи конденсаторов; U — разность потенциалов на обкладках конденсаторов.

Выразив в формуле (1) энергии W_1, и W_2 по формуле (2) и принимая во внимание, что общая емкость параллельно соединенных конденсаторов равна сумме емкостей отдельных конденсатором, получим

$$W = \frac{C_1 \cdot U_1^2}{2} - \frac{(C_1 + C_2) \cdot U_2^2}{2}, \qquad (3)$$

где U_2 —разность потенциалов на зажимах батареи конденсаторов.

Учитывая, что закону сохранения заряда заряд после присоединения второго конденсатора остался прежним, выразим разность потенциалов U_2 следующим образом:

$$U_2 = Q/(C_1 + C_2) = C1 \cdot U1/(C_1 + C_2). \qquad (4)$$

Подставив выражение U_2 в формулу (3), после несложных преобразований, получим

$$W = \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot U_2^2}{2 \cdot (C_1 + C_2)}.$$

Подставив исходные данные и произведя вычисления

$$W = \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 40^2}{2 \cdot (3 \cdot 10^{-6} + 5 \cdot 10^{-6})} = 1{,}5 \text{ мДж}.$$

Ответ: на образование искры израсходуется 1,5 мДж.

Пример 13. *ЭДС батареи - 80 В, внутреннее сопротивление - 5 Ом, внешняя цепь потребляет мощность 140 Вт. Определить силу тока в цепи, коэффициент полезного действия источника.*

Решение

По закону Ома для полной цепи

$$I = \varepsilon/(r + R), \qquad (1).$$

где I - сила тока в цепи, ε и r - ЭДС и внутреннее сопротивление батареи, R - сопротивление внешней цепи.

По определению внешняя цепь потребляет мощность

$$P_n = I^2 R \qquad (2),$$

Выражая R из (2) и подставляя в (1) приходим к квадратному уравнению для силы тока в цепи

$$I^2 - (\varepsilon/r) \cdot I + P_n/r = 0,$$

откуда сила тока

$$I = \varepsilon/2r \pm \sqrt{(\varepsilon/2 \cdot r)^2 - P_n/r}.$$

Подставляя исходные данные, получим

$$I_1 = 2 \text{ A}, \quad I_2 = 14 \text{ A}.$$

Подставляя полученные значения токов в (2) получим соответствующие им значения сопротивлений внешней нагрузки R_1=35 Ом, R_2=5/7 Ом.

По определению коэффициент полезного действия цепи $\eta = R/(R+r)$.

Подставляя значения сопротивлений внешней нагрузки, получим

$$\eta_1 = 0{,}875,\ \eta_2 = 0{,}125.$$

В первом случае работа цепи эффективнее.

Ответ: сила тока в цепи и К.ПД источника I = 2 А η = 0,875.

Пример 14. *Две одинаковые лампы питаются от источника постоянной ЭДС. При их последовательном соединении сила тока в каждой лампе на 40% меньше, чем при параллельном. Каким будет КПД цепи, если к источнику подключить только одну из этих ламп?87,5%*

Решение

По закону Ома для полной цепи для представленных на рис. 10 схем имеем

$$I_1 = \varepsilon/(r + R_1),\ \ I_2 = \varepsilon/(r + R_2).$$

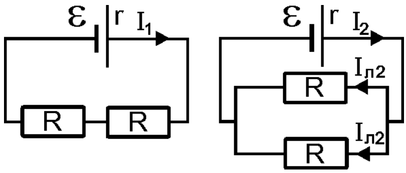


Рис. 10

В первой схеме по законам последовательного соединения проводников

$$R_1 = 2{\cdot}R \text{ и } I_{лI} = I_1. = \varepsilon / (r + 2{\cdot}R),$$

где R - сопротивление лампы, $I_{лI}$ - сила тока в лампе, присоединенной по первой схеме.

Для второй схемы по законам последовательного соединения проводников

$$1/R_2 = \cdot 1/R + 1/R,\quad I_{л1}{\cdot}R = I_{л2}{\cdot}R,\ I_2 = I_{л2} + I_{л1}$$

Откуда $R2 = \cdot R/2$ и $I_{лII} = I_2/2 = \varepsilon/(r + R/2)$,

где $I_{лII}$ - сила тока в лампе, присоединенной по второй схеме.

Так как по условию задачи $I_{лI} = 0{,}6{\cdot}I_{лII}$, то

$$\varepsilon / (r + 2{\cdot}R) = 0{,}6{\cdot}\varepsilon/2{\cdot}(r + \cdot R/2)$$

Откуда внутреннее сопротивление источника r = R/7

По определению, коэффициент полезного действия источника при одной присоединенной лампе $\eta = R/(R+r) = 7{\cdot}R/(7{\cdot}R + R) = 0{,}875$ или 87,5%.

Ответ: КПД цепи η = 87,5%.

Пример 15. *Электрическая цепь состоит из двух гальванических элементов, трех сопротивлений и гальванометра (рис. 11). В этой цепи R_1 = 100 Ом, R_2 = 50 Ом, R_3 = 20 Ом, э д. с. элемента ε_1 = 2 В. Гальванометр регистрирует ток I_3 = 50 мА, идущий в направлении, указанном стрелкой. Определить э. д. с. ε_2 второго элемента. Сопротивлением гальванометра и внутренним сопротивлением элементов пренебречь.*

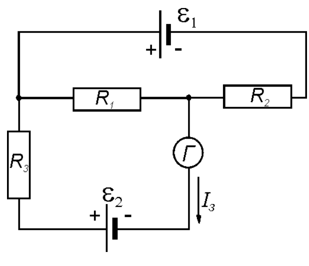


Рис. 11

Указание. Для расчета разветвленных цепей применяются законы Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа. Алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле, равна нулю, т. е.

$$\sum I_i = 0,$$

Второй закон Кирхгофа. В любом замкнутом контуре алгебраическая сумма падений напряжений на отдельных участках цепи $\Sigma I_i R_i$ равна алгебраической сумме э. д. с. $\Sigma \varepsilon_i$, встречающихся в контуре.

$$\sum I_i R_i = \sum \varepsilon_i .$$

На основании этих законов можно составить уравнения, необходимые для определения искомых величин (сил токов, сопротивлений и э. д. с.).

Применяя законы Кирхгофа, следует соблюдать следующие правила:

1. Перед составлением уравнений произвольно выбрать: а) направления токов (если они не заданы по условию задачи) и указать их стрелками на чертеже; б) направление обхода контуров.

2. При составлении уравнений по первому закону Кирхгофа считать токи, подходящие к узлу, положительными; токи, отходящие от узла, отрицательными.

Число уравнений, составляемых по первому закону Кирхгофа, должно быть на единицу меньше числа узлов, содержащихся в цепи.

3.При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа надо считать, что: а) падение напряжения на участке цепи (т. е. произведение $I \cdot R$) входит в уравнение со знаком плюс, если направление тока в данном участке совпадает с выбранным направлением обхода контура; в противном случае произведение $I \cdot r$ входит в уравнение со знаком минус; б) э. д. с. входит в уравнение со знаком плюс, если она повышает потенциал в направлении обхода контура, т. с если при обходе приходится идти от минуса к плюсу внутри источника тока; в противном случае э. д. с. входит в уравнение со знаком минус.

Число независимых уравнений, которые могут быть составлены по второму закону Кирхгофа, должно быть меньше числа замкнутых контуров, имеющихся в цепи. Для составления уравнений первый контур можно выбирать произвольно. Все последующие контуры следует выбирать таким образом, чтобы в каждый новый контур входила хотя бы одна ветвь цепи, не участвовавшая ни в одном из ранее использованных контуров. Если при решении уравнений, составленных указанным выше способом, получены отрицательные значения силы тока или сопротивления, то это означает, что ток через данное сопротивление в действительности течет в направлении, противоположном произвольно выбранному.

Решение.

Выберем направления токов, как они показаны на рис. 12, и условимся обходить контуры по часовой стрелке.

По первому закону Кирхгофа для узла F имеем

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0. \qquad (1)$$

По второму закону Кирхгофа имеем для контура $ABCDFA$

$$-I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 = -\varepsilon_1$$

или после умножения обеих частей равенства на – 1

$$I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 = \varepsilon_1 \qquad (2)$$

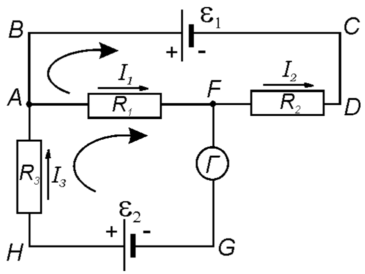


Рис. 12

Соответственно для контура $AFGHA$ найдем

$$I_1 \cdot R_1 + I_3 \cdot R_3 = \varepsilon_2 \qquad (3)$$

После подстановки известных числовых значений в уравнения (1), (2) и (3) получим:

$$I_1 - I_2 - 0{,}05 = 0;$$

$$100 \cdot I_1 + 50 \cdot I_2 = 2;$$

$$100 \cdot I_1 + 0{,}05 \cdot 20 = \varepsilon_2.$$

Перенеся в этих уравнениях неизвестные величины в левые части, а известные – в правые, получим следующую систему уравнений:

$$I_1 - I_2 = 0{,}05;$$

$$50 \cdot I_1 + 25 \cdot I_2 = 1;$$

$$100 \cdot I_1 - \varepsilon_2 = 1_2.$$

Эту систему с тремя неизвестными можно решить обычными приемами алгебры, но так как по условию задачи требуется определить только одно неизвестное ε_2 из трех, то воспользуемся методом определителей.

Составим и вычислим определитель Δ системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 50 & 25 & 0 \\ 100 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 50 & 0 \\ 100 & -1 \end{vmatrix} = -25 - 50 = -75$$

Составим и вычислим определитель Δ_{ε_2} :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0{,}05 \\ 50 & 25 & 1 \\ 100 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 50 & 0 \\ 100 & -1 \end{vmatrix} + 0{,}05\begin{vmatrix} 50 & 25 \\ 100 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -25 - 50 - 100 - 125 = -300$$

Разделив определитель Δ_{ε_2} на определитель системы Δ, найдем численное значение э. д. с.

$$\varepsilon_2 = (-300) / (-75) = 4 \text{ В}.$$

Ответ: ε_2 = 4 В.

Пример 16. *Сила тока в проводнике сопротивлением r = 20 0м нарастает в течение времени 2 с по линейному закону от 0 до 6 А. Определить теплоту Q, выделившуюся в этом проводнике это время.*

Решение.

По закону Джоуля—Ленца количество теплоты dQ, выделяющееся в проводнике за бесконечно малый промежуток времени dt

$$dQ = I^2 r \cdot dt \qquad (1)$$

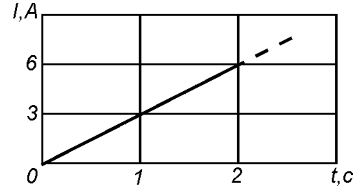


Рис. 13.

Здесь сила тока I является некоторой функцией времени. По условию задачи

$$I = kt, \qquad (2)$$

где k - коэффициент пропорциональности, численно равный приращению силы тока в единицу времени.

Из графика (рис. 13)

$$k = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{6-0}{2} = 3 A/c.$$

С учетом (2) формула (1) примет вид

$$dQ = k^2 \cdot t^2 \cdot r \cdot dt. \qquad (3)$$

Откуда, произведя интегрирование в пределах от $t = 0$ до $t = 2$ с, и, подставляя исходные данные, получим

$$Q = k^2 \cdot r \int_0^2 t^2 dt = \cdot k^2 \cdot r\, t^3/3 \Big|_0^2 = 3^2 \cdot 20 \cdot 2^3/3 = 480 \text{ Дж}.$$

Ответ: теплота, выделившаяся в проводнике Q = 480 Дж.

Задачи для самостоятельного решения

1. Два шарика массой m =1 г каждый подвешены на нитях, верхние концы которых соединены вместе. Длина каждой нити l = 10 см. Какие одинаковые заряды надо сообщить шарикам, чтобы нити разошлись на угол α =60°? Ответ: 79 нКл. .

2. Расстояние между зарядами q_1=100 нКл и q_2 = — 50 нКл равно 10 см. Определить силу F, действующую на заряд q_3=1 мкКл, отстоящий на 12 см от заряда q_1и на 10 см от заряда q_2. Ответ: 51 мН.

3. Тонкий длинный стержень равномерно заряжен с линейной плотностью τ =1,5 нКл/см. На продолжении оси стержня на расстоянии 12 см от его конца находится точечный заряд q_1= 0,2 мкКл. Определить силу взаимодействия заряженного стержня и точечного заряда. Ответ:2,25 мН.

4. Длинная прямая тонкая проволока несет равномерно распределенный заряд. Вычислить линейную плотность τ заряда, если напряженность поля на расстоянии 0,5 м от проволоки против ее середины E = 2 В/см. Ответ: 5,55 нКл/м.

5. С какой силой, приходящейся на единицу площади, отталкиваются две одноименно заряженные бесконечно протяженные плоскости с одинаковой поверхностной плотностью заряда σ = 2 мкКл/м^2? Ответ:0,23 Н/м^2..

6. Какую ускоряющую разность потенциалов и должен пройти электрон, чтобы получить скорость v =8 Мм/с? Ответ:182 В.

7. Заряд равномерно распределен по бесконечной плоскости с поверхностной плотностью σ =10 нКл/м^2. Определить разность потенциалов двух точек поля, одна из которых находится на плоскости, а другая удалена от нее на расстояние а =10 см. Ответ:56,6 В.

8. Электрон с начальной скоростью 3 Мм/с влетел в однородное электрическое поле напряженностью 150 В/м. Вектор начальной скорости перпендикулярен линиям напряженности электрического поля. Определить. 1) силу, действующую на электрон; 2) ускорение, приобретаемое электроном; 3) скорость электрона через 0,1 мкс. Ответ:24 аН; 26,4 Тм/с^2; 4 Мм/с.

9. К батарее с э.д.с. 300 В подключены два плоских конденсатора емкостями C_1 =2 пФ и C_2 =3 пф. Определить заряд и напряжение на пластинах конденсаторов при последовательном и параллельном соединениях. Ответ:1) 0,36 нКл; 180 В; 120 В; 2) 0,6 нКл; 0,9 кКл; 300 В.

10. Конденсатор емкостью C_1=667 пФ зарядили до разности потенциалов 1,5 кВ и отключили от источника напряжения. Затем к нему параллельно присоединили незаряженный конденсатор емкостью C_2=444 пФ. Определить энергию, израсходованную на образование искры, проскочившей при соединении конденсаторов. Ответ: 0,3 мДж.

11. На концах медного провода длиной 5 м поддерживается напряжение 1 В. Определить плотность тока в проводе. Ответ:1,18.10^7 А/м^2.

12. Резистор сопротивлением R_1 =5 Ом, вольтметр и источник тока соединены параллельно. Вольтметр показывает напряжение 10 В. Если заменить резистор другим с сопротивлением R_2 =12 Ом, то вольтметр покажет напряжение 12 В. Определить э. д.с. и внутреннее сопротивление источника тока. Током через вольтметр пренебречь. Ответ:14 В; 2 Ом.

13. Определить электрический заряд, прошедший через поперечное сечение провода сопротивлением 3 Ом при равномерном нарастании напряжения на концах провода от 2 В до 4: В в течении 20 с. Ответ:20 Кл.

14. Определить силу тока в цепи, состоящей из двух элементов с э. д. с. 1,6 В и 1,2 В и внутренними сопротивлениями 0,6 Ом и 0,4 Ом, соединенных одноименными полюсами. Ответ: 0,4А.

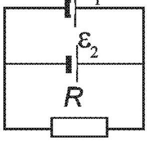


Рис. 14 .

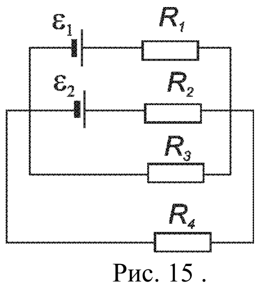


Рис. 15 .

15. Три батареи с э.д.с. 8 В, 3 В и 4 В и внутренними сопротивлениями 2 Ом каждое соединены одноименными полюсами. Пренебрегая сопротивлением соединительных проводов, определить силы токов идущих через батареи. Ответ: 1,5 А; 1 А; 0,5 А.

16. Определить напряжение U на зажимах реостата сопротивлением R (рис. 14), если ε_1 =5 В, r_1 =l Ом, ε_2 =3 В, r_2=0,5 Ом, R = 3 Ом. Ответ: 8,3 В.

17. Определить напряжение на резисторах сопротивлениями R_1 = 2 Ом, $R_2 = R_3$ = 4 Ом и R_4 = 2 Ом, включенных в цепь, как показано на рис. 15, если ε_1 =10 В, ε_2 = 4 В. Сопротивлениями источников тока пренебречь. Ответ:6 В; 0,4 В; 4 В.

18. Определить силу тока насыщения $I_{нас}$ и плотность тока $j_{нас}$ в. ионизационной камере с плоскими электродами площадью S = 400 см^2 каждый, если в 1 см^3 газа, заключенного между электродами, под действием ионизатора ежесекундно образуется n = 8 10^6 пар ионов. Объем газа в камере V = 1,2 л. Заряд каждого иона считать равным элементарному заряду. Ответ:1,54 нА; 38,5 нА/м^2.

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ.

Основные законы и формулы.

• Связь магнитной индукции $\vec{B}$ с напряженностью $\vec{H}$ магнитного поля;

$$\vec{B} = \mu\mu_o \cdot \vec{H},$$

где μ – магнитная проницаемость изотропной среды; μ_o – магнитная постоянная ($\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м). В вакууме μ = 1 и тогда магнитная индукция в вакууме

$$\vec{B} = \mu_o \vec{H}.$$

• Закон Био – Савара – Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\left[d\vec{l} \times \vec{r}\right]\frac{1}{r^3}, \quad dB = \frac{\mu\mu_0 \cdot I \cdot \sin\alpha}{4\pi \cdot r^2} dl,$$

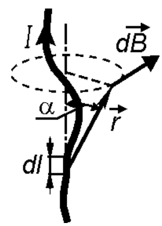


Рис.16

где dB – магнитная индукция поля, создаваемого элементом проводника длиной dl с током I(рис.16); $\vec{r}$ – радиус – вектор, направленный от элемента проводника к точке, в которой магнитная индукция вычисляется; α – угол между радиусом – вектором и направлением тока в элементе проводника.

• Магнитная индукция в центре кругового тока:

$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{2 \cdot R}.$$

где R – радиус кругового витка.

• Магнитная индукция на оси кругового тока:

$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot 2\pi R^2 I}{4\pi \cdot \left(R^2 + h^2\right)^{3/2}},$$

где h – расстояние от центра витка до точки, в которой вычисляется магнитная индукция.

• Магнитная индукция поля, создаваемого отрезком провода с током (рис. 17): ^

$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r_0} \cdot (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2),$$

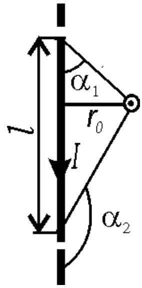


Рис. 17

Обозначения ясны из рисунка. Направление вектора магнитной индукции $\vec{B}$ обозначено точкой – это значит, что $\vec{B}$ направлен перпендикулярно плоскости чертежа к нам.

• Магнитная индукция поля прямого тока:

$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r_0}.$$

где r_0 – расстояние от оси проводника до точки, в которой вычисляется магнитная индукция.

• Магнитная индукция поля соленоида;

$$B = \mu\mu_o \cdot n \cdot I,$$

где n – число витков соленоида приходящееся на единицу длины.

• Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле, закон Ампера (рис. 18)

$$F_A = I \cdot B \cdot l \cdot \sin\alpha.,$$

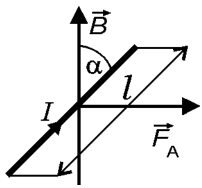


Рис. 18

где l – длина проводника; – α – угол между направлением тока в проводнике и вектором магнитной индукции $\vec{B}$. Это выражение справедливо для однородного магнитного поля и прямого отрезка проводника.

Если поле неоднородно и проводник не является прямым, то закон Ампера можно применять к каждому элементу проводника в отдельности:

$$dF_A = I \cdot B \cdot dl \cdot \sin\alpha.$$

• Сила взаимодействия параллельных проводов с током:

$$F = \frac{\mu_o \cdot I_1 . I_2 \cdot l}{2\pi d}$$

где d – расстояние между проводами.

• Магнитный момент контура с током;

$$\vec{p}_m = \vec{n} \cdot I \cdot S,$$

где I – сила тока, протекающего по контуру; S – площадь контура; $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к плоскости контура.

• Механический (вращательный) момент, действующий на контур с током, помещенный в однородное магнитное поле:

$$M = p_m \cdot B \cdot \cdot \sin\alpha,$$

где α – угол между векторами $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$.

• Потенциальная энергия контура с током в магнитном поле:

$$П = -p_m B \cdot \cos\alpha.$$

За нулевое значение потенциальной энергии контура с током в магнитном поле принято расположение контура, когда вектор $\vec{p}_m$ перпендикулярен вектору $\vec{B}$.

• Отношение магнитного момента p_m к механическому L (моменту импульса) заряженной частицы, движущейся по круговой орбите:

$$\frac{p_m}{L} = \frac{Q}{2m}$$

где Q – заряд частицы; m – масса частицы.

• Сила Лоренца действует на заряд q, движущийся в магнитном поле со скоростью $\vec{v}$ под углом α к вектору $\vec{B}$ (рис. 19)·

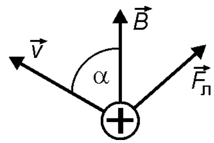


Рис. 19

$$F_л = q \cdot v \cdot B \cdot \sin\alpha.,$$

В магнитном поле заряженная частица движется по прямой вдоль силовой линии, если $\alpha = 0$, и по окружности в плоскости перпендикулярной вектору магнитной индукции, если $\alpha = \pi/2$. В этом случае сила Лоренца является центростремительной и согласно второму закону Ньютона

$$\frac{mv^2}{R} = q \cdot v \cdot B.$$

Откуда:

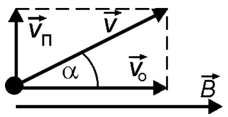
Радиус траектории частицы $R = \dfrac{mv}{qB}$.

Период обращения частицы $T = \dfrac{2\pi R}{v} = \dfrac{2\pi}{B} \cdot \dfrac{m}{q}$.

• Заряженные частицы ускоряются электрическим полем, поэтому скорость частицы можно найти из соотношения

$$\frac{mv^2}{2} = q \cdot U.$$

• Если $0<\alpha<\pi/2$, то частица движется по спирали с осью расположенной вдоль силовых линий однородного поля. В этом случае вектор скорости можно разложить на две составляющие: $\vec{v}_о$, направленную вдоль вектора магнитной индукции, и $\vec{v}_п$, направленную перпендикулярно вектору магнитной индукции (см. рис. 20). Величина $v0$ будет определять радиус спирали, а составляющая $vп$ будет определять ее шаг.



$v_0 = v \cdot cos\alpha, \; v_п = v \cdot sin\alpha.$

Рис. 20.

Радиус спирали $R = \dfrac{m \cdot v_п}{q \cdot B}$

Период обращения $T = \dfrac{2\pi R}{v_п} = \dfrac{2\pi}{B} \cdot \dfrac{m}{q}$

Шаг спирали $H = v_0 \cdot T = \dfrac{2\pi v_0}{B} \cdot \dfrac{m}{q}$

• Магнитный поток:

а) в случае однородного магнитного поля и плоской поверхности

$$\Phi = B \cdot S \cdot cos\alpha. \text{ , или } \Phi = B_n S,$$

где S – площадь контура (рис. 21); α – угол между нормалью к плоскости контура и вектором магнитной индукции;

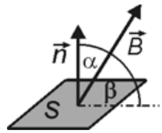


Рис. 21

б) в случае неоднородного поля и произвольной поверхности

$$\Phi = \int\limits_s B_n \cdot dS,$$

(интегрирование ведется по всей поверхности.)

• Потокосцепление (полный поток):

$$\Psi = N.\Phi \, .$$

Эта формула верна для соленоида и тороида с равномерной намоткой плотно прилегающих друг к другу N витков.

• Работа по перемещению замкнутого контура в магнитном поле

$$A = I \Delta\Phi. \, .$$

• Э. д. с. индукции

$$\varepsilon_{инд} = -\frac{\Delta\Psi}{\Delta t} = -N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

• Разность потенциалов на концах проводника, движущегося со скоростью v в магнитном поле (рис. 22)

$$\Delta U = \left| \varepsilon_{инд} \right| = v \cdot B \cdot l \cdot sin\alpha,$$

где l – длина проводника; α – угол между, векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$.

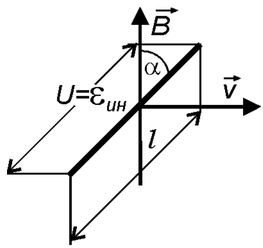


Рис. 22

• Заряд, протекающий по замкнутому контуру при изменении магнитного потока, пронизывающего этот контур:

$$Q = \frac{\Delta\Psi}{R} = \frac{\Delta\Phi}{R} .$$

где R – сопротивление контура.

• Индуктивность контура:

$$L = \frac{\Psi}{I}.$$

• Э. д. с. самоиндукции:

$$|\varepsilon_{сам}| = L \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

• Индуктивность соленоида:

$$L = \mu\mu_o n^2 V.$$

где n – число витков, приходящееся на единицу длины соленоида; V – объем соленоида.

• Магнитная проницаемость μ ферромагнетика связана с магнитной индукцией B поля в нем и напряженностью намагничивающего ноля соотношением

$$\mu = \frac{B}{\mu_o H}.$$

• Связь между магнитной индукцией B поля в ферромагнетике и напряженностью H намагничивающего поля выражается графически (рис. 23).

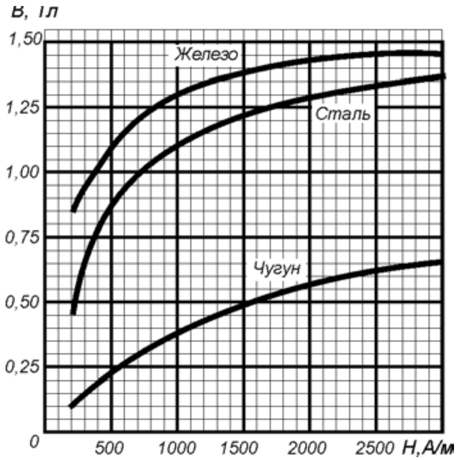


Рис. 23

• Мгновенное значение силы тока в цепи, обладающей сопротивлением R и индуктивностью L:

а) при замыкании цепи

$$I = I_0 \cdot (1 - e^{-\frac{Rt}{L}}) = \frac{\varepsilon}{R} \cdot (1 - e^{-\frac{Rt}{L}}),$$

где ε – э. д. с. источника тока; t – время, прошедшее после замыкания цепи;

б) при размыкании цепи

$$I = I_0 \cdot e^{-\frac{Rt}{L}},$$

где I_0 – значение силы тока в цепи при $t = 0$, t – время, прошедшее с момента размыкания цепи,

• Энергия магнитного поля:

$$W_м = \frac{L \cdot I^2}{2},$$

• Объемная плотность энергии магнитного поля (энергия, заключенная в единице объема):

$$w = B \cdot H/2, \text{ или } w = B^2/2\mu\mu_o, \text{ или } w = \mu\mu_o H^2/2,$$

где B – магнитная индукция; H – напряженность магнитного поля.

Примеры решения задач.

Пример 1. *По длинному прямому тонкому проводу течет ток силой I = 20 А. Определить магнитную индукцию поля, создаваемого проводником в точке, удаленной от него на расстояние r = 4 см.*

Решение.

Согласно закону Био-Савара-Лапласа величина B магнитной индукции поля, создаваемого прямым бесконечно длинным проводником с током I на расстоянии r от проводника определяется выражением

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r}.$$

где $\mu_o = 4 \cdot \pi 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная.

Подставляя исходные данные, получим

$$B = 4 \cdot \pi 10^{-7} \frac{20}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-2}} \text{ Тл} = 10^{-4} \text{ Тл} = 0{,}1 \text{ мТл}.$$

Ответ: магнитная индукция поля, создаваемого проводником В = 0,1 мТл.

Пример 2. *Два параллельных бесконечно длинных провода D и C, по которым текут в одном направлений электрические токи силой I = 60 А, расположены на расстоянии d = 10 см друг от друга. Определить магнитную индукцию В поля, создаваемого проводниками с током в точке А, отстоящей от оси одного проводника на расстоянии r_1 = 5 см, от другого —r_2 = 12 см.*

Решение.

Согласно принципу суперпозиции магнитных полей магнитная индукция в точке А

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2,$$

где $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ – индукции магнитных полей, создаваемых каждым проводником с током в отдельности (рис. 24).

Абсолютное значение магнитной индукции B может быть найдено по теореме косинусов

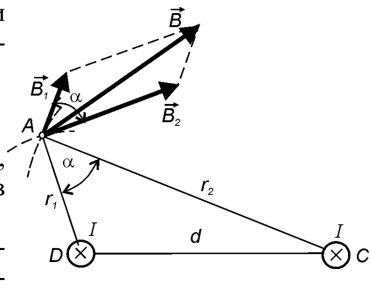


Рис. 24

$$B = B_1^2 + B_2^2 + 2 \cdot B_2 B_1 \cos\alpha, \qquad (1)$$

где α — угол между векторами $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$.

Согласно закону Био-Савара-Лапласа значения магнитных индукций полей прямых весконечно длинных проводников с током

$$B_1 = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r_1}; \quad B_2 = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r_2}.$$

Подставляя выражения B_1 и B_2 в формулу (1), получим

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1^2 \cdot r_2^2} \cos\alpha} . \qquad (2)$$

Из чертежа $\alpha = \angle DAC$ (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами). Тогда, по теореме косинусов имеем

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 — 2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \cos\alpha,$$

откуда

$$\cos\alpha = = (r_1^2 + r_2^2 - d^2) / 2 \cdot r_1 \cdot r_2.$$

После подстановки числовых значений получим

$$\cos\alpha = = (5^2 + 12^2 - 10^2) / 2 \cdot 5 \cdot 12 = 23/40.$$

Подставляя в формулу (2) значения входящих величин, определяем искомую индукцию:

$$B = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7} \cdot 60}{2 \cdot 3{,}14} \cdot \sqrt{\frac{1}{0{,}05^2} + \frac{1}{0.12^2} + \frac{2}{0.05^2 \cdot 0.12^2} \cdot \frac{23}{40}} = 3{,}08 \cdot 10^{-4}\ Тл = 308\ мкТл.$$

Ответ: магнитная индукция поля $B = 308$ мкТл.

Пример 3. *Бесконечно длинный провод изогнут так, как это изображено на рис. 25. Радиус R дуги окружности равен 10см. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого в точке O током I = 80 A, текущим по этому проводу.*

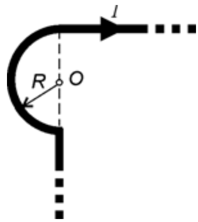


Рис. 25

Решение.

Магнитную индукцию B в точке O найдем, используя принцип суперпозиции магнитных полей:

$$\vec{B} = \Sigma \vec{B}_i.$$

В нашем случае провод можно разбить на три части (рис. 26): два прямолинейных провода *(1 т 3),* одним концом уходящие в бесконечность, и дугу полуокружности *(2)* радиуса R. Тогда

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3,$$

где $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ и $\vec{B}_3$ — магнитные индукции в точке O, создаваемые током, текущим соответственно на первом, втором и третьем участках провода.

Так как точка O лежит на оси провода 1, то $\vec{B}_1 = 0$ и тогда

$$\vec{B} = \vec{B}_2 + \vec{B}_3.$$

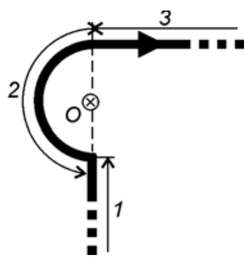


Рис. 26

Учитывая, что векторы $\vec{B}_2$ и $\vec{B}_3$ направлены в соответствии с правилом буравчика перпендикулярно плоскости чертежа от нас, то геометрическое суммирование можно заменить алгебраическим

$$B = B_2 + B_3.$$

Магнитную индукцию B_2 найдем, воспользовавшись, выражением для магнитной индукции в центре кругового тока:

$$B = \frac{\mu_o I}{2R}.$$

В нашем случае магнитное поле в точке О создается, лишь половиной такого кругового тока, поэтому

$$B_2 = \frac{\mu_o I}{4R}.$$

Магнитную индукцию B_3 найдем как индукцию прямого

$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r_0} \cdot (\cos\alpha_1 — \cos\alpha_2),$$

В нашем случае $r_0 = R$, $\alpha_1 = \pi/2$ ($\cos\alpha_1 = 0$), $\alpha_2 = \pi$ I ($\cos\alpha_2 = -1$). Тогда

$$B_3 = \frac{\mu_o I}{4\pi R}.$$

Используя найденные выражения для B_2 и B_3, получим

$$B = \frac{\mu_o I}{4R} + \frac{\mu_o I}{4\pi R} = \frac{\mu_o I}{4\pi R} \cdot (\pi + 1).$$

Произведем вычисления:

$$B = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 80}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}1} (3{,}14 + 1) \text{ Тл} = 3{,}31 \cdot 10^{-4} \text{ Тл} = 331 \text{ мкТл}.$$

Ответ: магнитная индукция поля B = 331 мкТл..

Пример 4*. По проводу, согнутому в виде квадрата со стороной* a = *0,1 см, течет ток силой I = 100 А. Найти магнитную индукцию* **B** *в точке О пересечения диагоналей квадрата.*

Решение.

Согласно принципу суперпозиции магнитных полей, магнитная индукция $\vec{B}$ поля квадратного витка будет равна геометрической сумме магнитных индукций полей, создаваемых каждой стороной квадрата в отдельности (рис. 27)

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4. \qquad (1)$$

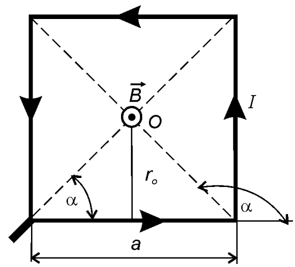


Рис. 27.

В точке O пересечения диагоналей квадрата все векторы индукции будут направлены перпендикулярно плоскости витка «к нам». Кроме того, из соображений симметрии следует, что абсолютные значения этих векторов одинаковы. т.е.; $B_1 = B_2 = B_3 = B_4$. Это позволяет векторное равенство (1) заменить скалярным равенством

$$B = 4 \cdot B_1. \qquad (2)$$

Согласно закону Био-Савара-Лапласа магнитная индукция B_1 поля, создаваемого отрезком прямолинейного провода с током, выражается формулой

$$B = \frac{\mu\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r_0} \cdot (\cos \alpha_1 - \cos\alpha_2), \qquad (3)$$

Учитывая, что $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$ и $\cos \alpha_1 = -\cos\alpha_2 = \cos(\pi/4) = 0,707$ (см. рис. 13), формулу (3) можно переписать в виде

$$B_1 = 0,707 \cdot \mu_0 \cdot I/2\pi \cdot r_0.$$

Тогда, учитывая, что $r_0 = a/2$, из формулы (2) имеем

$$B = 2,828 \cdot \mu_0 \cdot I/\pi \cdot a.$$

Подставив в эту формулу числовые значения физических величин и, произведя вычисления получим:

$$B = 2,828 \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 10^2/3,14 \cdot 0,1 = 1,13 \cdot 10^{-3}\ Тл = 1,13мТл.$$

Ответ: Найти магнитную индукцию в точке пересечения диагоналей квадрата. B = 1,13мТл.

Пример 5. *Электрон, влетев в однородное магнитное поле (B = 0,2 Тл), стал двигаться по окружности радиусу R = 5 см. Определить магнитный момент p_m эквивалентного кругового тока.* |

Решение.

Электрон начинает двигаться по окружности, если он влетает в однородное магнитное поля перпендикулярно линиям магнитной индукции. На рис. 28 линии магнитной индукции перпендикулярны плоскости чертежа и направлены «от нас» (обозначены крестиками).

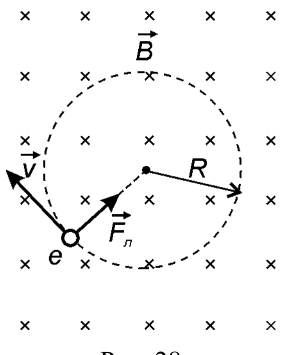


Рис. 28

Движение электрона по окружности эквивалентно круговому току, который в данном случае определяется выражением

$$I_{экв} = \frac{e}{T}.$$

где e – элементарный заряд (модуль заряда электрона); T — период его обращения.

Период обращения можно выразим. через скорость электрона v и путь, проходимый электроном за период $T = v / (2\pi R)$. Тогда

$$I_{экв} = \frac{e \cdot v}{2\pi R}. \qquad (1)$$

По определению, магнитный момент контура с током выражается соотношением

$$P_m = I_{экв} \cdot S, \qquad (2)$$

где S – площадь, ограниченная окружностью, описываемом электроном ($S = \pi \cdot R^2$). Подставив $I_{экв}$ из (1) в выражение (2), получим

$$P_m = \frac{ev}{2\pi R}\pi R^2 = \frac{1}{2}evR. \qquad (3)$$

При движении электрона в магнитном поле по окружности сила Лоренца является центростремительной, и тогда согласно второму закону Ньютона имеем

$$mv^2/R = e \cdot v \cdot B,$$

откуда

$$v = e \cdot B \cdot R / m,$$

и тогда

$$P_m = \frac{e^2 B R^2}{2m}.$$

Подставляя исходные данные и, произведя вычисления, получим

$$P_m = \frac{(1{,}6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}05^2}{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}} = 7{,}03 \cdot 10^{-12}\ А \cdot м^2.$$

Ответ: магнитный момент эквивалентного кругового тока $P_m = 7{,}03 \cdot 10^{-12}$ А·м^2.

Пример 6. *Частица, имеющая отношение заряда к массе 10^8, ускоренная напряжением 20 кВ, влетает в однородное магнитное поле с индукцией 0.1 Тл под углом $\alpha = 30^o$ к силовым линиям. Определить радиус и шаг спирали, по которой движется частица в магнитном поле.*

Решение.

При ускорении частицы вся работа электрического поля идет на сообщение заряду кинетической энергии, тогда

$$q \cdot U = m \cdot v^2/2,$$

где q и m - заряд и масса частицы, v - скорость частицы, U - ускоряющая разность потенциалов.

Откуда $$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}} \qquad (1)$$

Движение частицы представляет собой сумму движения по окружности в плоскости перпендикулярной силовым линиям со скоростью

$$v_п = v \cdot sin\alpha \qquad (2),$$

и движения вдоль силовых линий со скоростью

$$v_o = v \cdot cos\alpha.$$

Для первого движения по 2 - му закону Ньютона имеем

$$mv_п^2/R = q \cdot v_п \cdot B,$$

откуда с учетом (1) и (2) радиус спирали

$$R = mv_п/qB = \frac{\sin\alpha}{B}\cdot\sqrt{\frac{2mU}{q}} \qquad (3).$$

По закону равномерного вращения один оборот частица делает за время

$$T = 2\pi R/v_п = 2\pi m/qB.$$

За это же время она сместится вдоль силовой линии на расстояние равное шагу спирали

$$H = v_o\cdot T = 2\pi m v_o/qB = \frac{2\pi\cdot\cos\alpha}{B}\cdot\sqrt{\frac{2mU}{q}}\ . \qquad (4).$$

Подставляя исходные данные в выражения (3) и (4) получим

$$R = \frac{0,5}{0,1}\cdot\sqrt{2\cdot 10^8\cdot 2\cdot 10^4} = 10^7\ м.$$

$$H = \frac{2\cdot 3,14\cdot 1,73}{2\cdot 0,1}\cdot\sqrt{2\cdot 10^8\cdot 2\cdot 10^4} = 1,08\cdot 10^8\ м.$$

Ответ: радиус и шаг спирали $R = 10^7$ м, $H = 1,08\cdot 10^8$ м.

Пример 7. *Виток площадью S с сопротивлением R расположен в магнитном поле с индукцией B перпендикулярно силовым линиям. Какой заряд пройдет по витку, если направление поля изменить на противоположное?*

Решение.

По закону электромагнитной индукции ЭДС, возникающая в замкнутом контуре

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi}{dt}, \qquad (1)$$

где Φ – магнитный поток, пронизывающий контур, N - число витков в контуре.

По закону Ома в витке возникнет ток силой

$$I = \varepsilon / R. \qquad (2)$$

где R - сопротивление контура.

Из определения силы тока заряд, проходящий через поперечное сечение проводника

$$Q = \int I\cdot dt\ . \qquad (3).$$

Подставляя (2) с учетом (1) при $N = 1$ в (3), получим

$$Q = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}. \qquad (4).$$

Если до поворота витка его пронизывал поток $\Phi_1 = B\cdot S$, то после изменения направления поля угол между нормалью и вектором магнитной индукции изменится на π и по определению потока $\Phi_2 = -B\cdot S$. Тогда

$$Q = \frac{2BS}{R}.$$

Ответ: заряд по витку пройдет заряд $Q = \frac{2BS}{R}$.

Пример 8. *Плоский квадратный контур со стороной a = 10 см, по которому течет ток силой I = 100 А, свободно установился в однородном магнитном поле (B = 1 Тл). Определить работу A, совершаемую внешними силами при повороте контура относительно оси, проходящей через середину его противоположных сторон, на угол φ = 90°. При повороте контура сила тока в нем поддерживается неизменной.*

Решение.

На контур с током в магнитном поле действует момент сил

$$M = p_m \cdot B \cdot \sin\alpha, \qquad (1)$$

где $p_m = \cdot I \cdot S = \cdot I \cdot a2$ — магнитный момент контура; B — магнитная индукция; α — угол между вектором $\vec{p}_m$, направленным по нормали к контуру, и вектором $\vec{B}$.

По определению работа, совершаемая моментом при вращении

$$A = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} M \cdot d\alpha,$$

или с учетом (1) в рассматриваемом случае

$$A = IBa^2 \int_0^{\pi/2} \sin\alpha \cdot d\alpha = IBa^2 \cos\alpha \Big|_0^{\pi/2} = IBa^2.$$

Подставляя исходные данные, получим

$$A = 100 \cdot 1 \cdot (0,1)^2 = 1 \text{ Дж}.$$

Ответ: работа, совершаемая внешними силами при повороте контура A = 1 Дж.

Пример 9. *В однородном магнитном поле (B = 0,1 Тл) равномерно с частотой 10 c^{-1} вращается рамка, содержащая 1000 витков, плотно прилегающих друг к другу. Площадь рамки S = 150 $см^2$. Определить мгновенное значение э.д.с. индукции ε_i, соответствующее углу поворота рамки в 30° относительно вектора магнтной индукции.*

Решение.

По закону Фарадея мгновенное значение э.д.с. электромагнитной индукции

$$\varepsilon_i = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt},$$

По определению магнитный поток, пронизывающий рамку в однородном магнитном поле

$$\Phi = B\cdot S\cdot\cos\alpha. ,$$

При вращении рамки с постоянной частотой угол между нормалью к рамке и вектором магнитной индукции α (рис. 29), меняется по закону $\alpha = \omega\cdot t = 2\pi nt$. При этом рамка поворачивается относительно вектора магнитной индукции на тот же угол.

Подставляя выражение для Φ и $\alpha = \omega\cdot t$ в закон Фарадея, и, произведя дифференцирование по времени, для ε_i получим

$$\varepsilon_i = NBS\omega \sin \omega t. = 2\pi nNBS\cdot\sin \alpha.$$

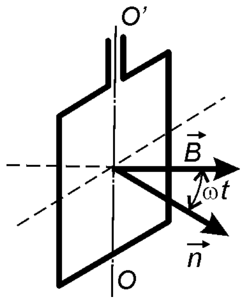


Рис. 29

Подставив исходные значения величин, и, произведя вычисления, получим

$$\varepsilon_i = 2\cdot 3{,}14\cdot 10\cdot 1000\cdot 0{,}1\cdot 1{,}5\cdot 10^{-2}\cdot 0{,}5 = 47{,}1В.$$

Ответ: мгновенное значение э.д.с. индукции ε_i = 47,1В.

Пример 10. *Соленоид с сердечником из немагнитного материала содержит N = 1200 витков провода, плотно прилегающих друг к другу. При силе тока I = 4 А магнитный поток Ф = 6 мкВб. Определить индуктивность соленоида и энергию W магнитного поля соленоида.*

Решение.

По определению индуктивность соленоида

$$L = \Psi / I,$$

где потокосцепление , в свою очередь, может быть выражено через поток Ф и число витков N (при условии, что витки плотно прилегают друг к другу):

$$\Psi = N\cdot\Phi.$$

здесь N - число витков соленоида, Φ - магнитный поток.

Тогда

$$L = N\cdot\Phi \;/ I, \qquad (1)$$

Энергия W магнитного поля соленоида с индуктивностью L при силе тока I, протекающего по его обмотке, определяется выражением

$$W = L\cdot I^2/2,$$

или, с учетом (1)

$$W = N\cdot\Phi\cdot I/2.$$

Подставляя значения исходных величин, и, произведя вычисления, получим:

$$L = 1200\cdot 6\cdot 10^{-6} /4 = 1{,}8.10^{-3}\ Гн = 1{,}8мГн.$$

$$W = 0{,}5\cdot 1200\cdot 6\cdot 10^{-4}\cdot 4 = 1{,}44.\ 10^{-2}\ Дж = 14{,}4мДж.$$

Ответ: индуктивность соленоида и энергия магнитного поля соленоида соответственно равны L =1,8мГн, W = 14,4мДж.

Задачи для самостоятельного решения

1. Напряженность магнитного поля 100 А/м. Вычислить магнитную индукцию В этого поля в вакууме. Ответ:126 мкТл.

2. По двум длинным параллельным проводам текут в одинаковом направлении токи силой 10 А и 15 А. Расстояние между проводами a=10 см. Определить напряженность магнитного поля в точке, удаленной от первого провода на 8 см и от второго - на 6 см. Ответ:44,5 А/м.

3. Решить задачу 2 при условии, что токи текут в противоположных направлениях, точка удалена от первого провода на 15 см и от второго на 10 см. Ответ:17,4 А/м.

4. По тонкому проводнику, изогнутому в виде правильного шестиугольника со стороной 10 см, идет ток силой 20 А. Определить магнитную индукцию B в центре шестиугольника, Ответ: 138 мкТл.

5. Обмотка соленоида содержит два слоя плотно прилегающих друг к другу витков провода диаметром d = 0,2 мм. Определить магнитную индукцию B на оси соленоида, если по проводу идет ток силой 0,5 А. Ответ:6,28 мТл.

6. В однородном магнитном поле с индукцией 0,01 Тл помещен прямой проводник длиной 20 см (подводящие провода находятся вне поля). Определить силу F, действующую на проводник, если по нему течет ток силой 50 А, а угол φ между направлением тока и вектором магнитной индукции равен 30°. Ответ: 50 мН.

7. Рамка с током силой 5 А содержит 20 витков тонкого провода. Определить магнитный момент p_m, рамки с током, если ее площадь 10 см^2. Ответ:0,1 А·м^2.

8. По витку радиусом R= 10 см течет ток силой 50 А. Виток помещен в однородное магнитное поле (B = 0,2 Тл). Определить момент силы М, действующей на виток, если плоскость витка составляет угол φ = 60° с линиями индукции. Ответ: 0,157 Н·м.

9. Протон влетел в магнитное поле перпендикулярно линиям индукции и описал дугу радиусом 10 см. Определить скорость протона, если магнитная индукция В=1 Тл. Ответ: 9,57 Мм/с.

10. Определить частоту обращения электрона по круговой орбите в магнитном поле (В=1 Тл). Ответ:2,8·10^{10} с$^{-1}$.

11. Электрон в однородном магнитном поле движется по винтовой линии радиусом 5 см и шагом 20 см. Определить скорость v электрона, если магнитная индукция B = 0,1 мТл. Ответ: 1,04·10^6 м/с.

12. Кольцо радиусом 10 см находится в однородном магнитном поле (B = 0,318 Тл). Плоскость кольца составляет с линиями индукции угол φ=30°. Вычислить магнитный поток Ф, пронизывающий кольцо. Ответ: 5 мВб.

13. В одной плоскости с бесконечно длинным прямым Проводом, по которому течет ток I = 50 А, расположена прямоугольная рамка так, что две большие стороны ее длиной l = 65 см параллельны проводу, а расстояние от провода до ближайшей из этих порой равно ее ширине. Каков магнитный поток Ф, пронизывающий рамку?

14. По проводнику, согнутому в виде квадрата со стороной a=10 см, течет ток силой 20 А. Плоскость квадрата перпендикулярна магнитным силовым линиям поля. Определить работу А, которую необходимо совершить для того, чтобы удалить проводник за пределы поля. Магнитная индукция В=0,1 Тл. Поле считать однородным. Ответ: 0,02 Дж.

15. Проводник длиной 1 м движется со скоростью 5 м/с перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля. Определить магнитную индукцию В, если на концах проводника возникает разность потенциалов 0,02 В. Ответ: 4 мТл.

15. Рамка площадью 50 $см^2$, содержащая N=100 витков, равномерно вращает6я в однородном магнитном поле (В = 40 мТл). Определить максимальную э. д. с. индукции, если ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции, а рамка вращается с частотой 960 об/мин. Ответ:2,01 В.

17. Кольцо из проволоки сопротивлением 1 мОм находится в однородном магнитном поле (B=0,4 Тл). Плоскость кольца составляет с линиями индукции угол φ = 90°. Определить заряд Q, который протечет по кольцу, если его выдернуть из поля. Площадь кольца 10 $см^2$. Ответ: 0,4 Кл.

18. Соленоид содержит 4000 витков провода, по которому течет ток силой 20 А. Определить магнитный поток Ф и потокосцепление ψ, если индуктивность соленоида 0,4 Гн. Ответ: 2 мВб; 8 Вб.

19. На картонный каркас длиной 50 см и площадью сечения 4 $см^2$ намотан в один слой провод диаметром d = 0,2 мм так, что витки плотно прилегают друг к другу (толщиной изоляции пренебречь). Определить индуктивность L получившегося соленоида. Ответ: 6,28 мГн.

20. Определить силу тока в цепи через 0,01 с после ее размыкания. Сопротивление цепи 20 Ом и индуктивность L = 0,l Гн. Сила тока до размыкания цепи 50 А. Ответ: 6,73 А.

21. По обмотке соленоида индуктивностью 0,2 Гн течет ток силой 10 А. Определить энергию W магнитного поля соленоида. Ответ: 10 Дж.

Библиографический список литературы

1. Физика: Методические указания и контрольные задания для студентов–заочников инженерно–технических специальностей вузов / А.А. Воробьев и др. – М.: Высш. шк., 1987 – 208с.

2. Чертов А. Г., Воробьев А.А. Задачник по физике: Учеб. пособие для студентов вузов – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1988 – 527с.: ил.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Единицы физических величин СИ, имеющие собственные наименования

Величина	Единица наименование	Обозначение
Электрический заряд	кулон	Кл
Сила тока	ампер	А
Потенциал электрического поля	вольт	В
Электрическое напряжение	вольт	В
Электрическая емкость	фарада	Ф
Электрическое сопротивление	ом	Ом
Электрическая проводимость	сименс	См
Магнитная индукция	тесла	Тл
Магнитный поток	вебер	Вб
Индуктивность	генри	Гн

2. Основные физические постоянные

Магнитная постоянная – $\mu_o = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м.
Масса покоя электрона – $m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг .
Масса покоя протона – $m_p = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ кг .
Ускорение свободного падения – $g = 9{,}81$ м/с^2.
Электрическая постоянная – $\varepsilon_o = 8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м .
Элементарный заряд – $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл .
Электрон–вольт – $1{,}6\cdot 10^{-19}$ Дж.

Относительная диэлектрическая проницаемость веществ ε

Вещество	ε	Вещество	ε
Вода	81	Слюда	7,0
Бензол	2,25	Стекло	7,0
Керосин	2	Текстолит	7.0
Масло (трансформаторное)	2,2	Фарфор	5,0
Парафин	2,25	Эбонит	3,0

Удельное сопротивление металлов ρ, мкОм·м

М е т а л л	ρ	М е т а л л	ρ
Алюминий	0,028	Медь	0,0175
Графит	3,900	Нихром	1,10
Железо	0,098	Серебро	0,016
Латунь	0,040		

Кратные и дробные приставки к единицам измерения

Название	Сокраще-ние	Множи-тель	Название	Сокраще-ние	Множи-тель
пико	п	10^{-12}	дека	да	10^{1}
нано	н	10^{-9}	гекто	г	10^{2}
микро	мк	10^{-6}	кило	к	10^{3}
милли	м	10^{-3}	мега	М	10^{6}
санти	с	10^{-2}	гига	Г	10^{9}
деци	д	10^{-1}	тера	Т	10^{12}

12. Греческий алфавит

Обозначения букв	Название букв	Обозначения букв	Названия букв
$A,\ \alpha$	альфа	N,ν	ню
B,β	бета	Ξ,ξ	кси
Γ,γ	гамма	O,o	омикрон
Δ,δ	дэльта	Π,π	пи
E,ε	эпсилон	P,ρ	ро
Z,ζ	дзета	Σ,σ	сигма
H,η	эта	T,τ	тау
Θ,θ	тэта	Y,υ	ипсилон
I,ι	иота	$\Phi,\ \varphi$	фи
K,κ	каппа	X,χ	хи
Λ,λ	ламбда	Ψ,ψ	пси
M,μ	мю	Ω,ω	омега