

Министерство образования и науки Российской Федерации
Тверской государственной технической университет

Кафедра прикладной физики

**ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ
ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ
КОЛЕБАНИЙ**

Тверь 2013

УДК 534(075.8)
ББК 22.3:22.213я7

Гусев, А.Ф. Лабораторный практикум. Прикладная теория колебаний / А.Ф. Гусев, В.В. Измайлов, М.В. Новоселова; под ред. А.Ф. Гусева. Изд. 1-е. Тверь: ТвГТУ, 2013. 60 с.

Подготовка специалистов любого технического профиля требует детального изучения физических закономерностей и, в частности, высококачественной экспериментальной подготовки. Лабораторный практикум представляет собой описание лабораторных работ, предусматривающих экспериментальное исследование механических колебаний на примере моделей технических систем. Данное методическое пособие должно оказать помощь студентам в проведении и осмыслении эксперимента, при измерениях и их статистической обработке и оценке.

Предназначен для студентов технических специальностей, выполняющих лабораторные работы по прикладной теории колебаний в соответствии с учебным планом.

Рецензенты: зав. кафедрой «Строительные, дорожные машины и оборудование», доктор технических наук, профессор Кондратьев А.В.; доцент кафедры «Общая физика» ТвГУ кандидат физико-математических наук Новоселов А.Р.

Лабораторный практикум рекомендован к опубликованию на заседании кафедры прикладной физики (протокол №7 от 27.06.13).

© Тверской государственный
технический университет, 2013
© А.Ф. Гусев, В.В. Измайлов,
М.В. Новоселова, 2013

Лабораторная работа № 1

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ НАКЛОННОГО МАЯТНИКА

Цель работы. Изучить основные закономерности колебаний наклонного маятника при наличии трения качения, определить коэффициент трения качения шара.

Приборы и принадлежности. Лабораторная установка «Наклонный маятник», набор шаров.

Краткие теоретические сведения

Колебания наклонного маятника относятся к свободным затухающим колебаниям, амплитуда которых из-за потерь энергии с течением времени уменьшается. Уравнение затухающих колебаний определяется свойствами колебательной системы и действующими в ней силами.

Сила трения качения. При качении без скольжения одного тела по поверхности другого возникает сила, препятствующая движению – сила трения качения. Сила трения качения возникает из-за деформации материалов катящегося тела и опоры, а также из-за разрыва образующихся молекулярных связей на площадке контакта. Трение качения, как и любое трение, всегда связано с необратимым процессом – превращением механической энергии в тепло.

Сила трения качения $F_{\text{тр}}$, действующая на катящееся по плоскости тело, прямо пропорциональна силе нормального давления N :

$$F_{\text{тр}} = fN,$$

где f – коэффициент трения качения.

Коэффициент трения качения зависит от материала и состояния соприкасающихся поверхностей, в довольно большом диапазоне скоростей не зависит от скорости катящегося тела. Для большинства материалов коэффициент трения качения при равных нагрузках значительно меньше, чем коэффициент трения скольжения, поэтому в технике по возможности стремятся заменить трение скольжения трением качения.

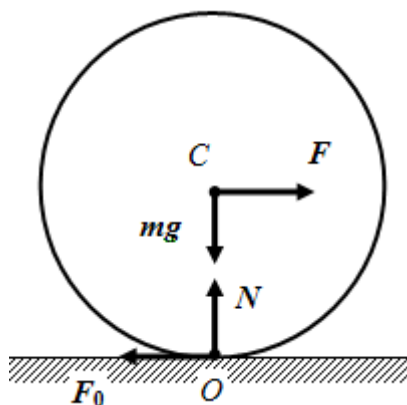


Рис. 1.1

1. *Уравнение колебаний наклонного маятника без учета силы трения качения.* Рассмотрим шар массой m и радиусом R , который под действием силы F , приложенной к его центру, катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности (рис. 1.1). Кроме силы F на шар действуют еще три внешних силы: сила тяжести mg , нормальная реакция опоры N и сила трения покоя F_0 (рис. 1.1).

Запишем основной закон динамики вращательного движения для катящегося шара относительно мгновенной оси вращения, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости чертежа:

$$I_O \varepsilon = FR, \quad (1.1)$$

где $I_O = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2$ – момент инерции шара относительно оси O ; ε – угловое ускорение центра масс шара.

Так как точка O – мгновенный центр вращения, то угловое ускорение связано с линейным ускорением центра масс C соотношением

$$\varepsilon = a/R.$$

Подставив его в уравнение (1.1), получим выражение, связывающее ускорение a центра масс катящегося шара и действующую силу F :

$$ma = \frac{5}{7}F. \quad (1.2)$$

Далее рассмотрим движение шара, подвешенного на нити и катящегося по пластине, поверхность которой составляет угол наклона β к вертикали (рис. 1.2). Проанализируем силы, действующие на шар. Силу тяжести P разложим на две составляющие, направленные перпендикулярно и параллельно наклонной плоскости:

$$P_{\perp} = mg \sin\beta, \quad P_{\parallel} = mg \cos\beta.$$

Со стороны наклонной плоскости на шар действует сила реакции N . Сумма всех сил в направлении, перпендикулярном плоскости, равна нулю.

Силу P_{\parallel} разложим так же на две составляющие, направленные вдоль нити и перпендикулярно ей (рис. 1.3). Сила F возвращающая шар в положение равновесия равна:

$$F = P_{\parallel} \sin\alpha = mg \cos\beta \sin\alpha. \quad (1.3)$$

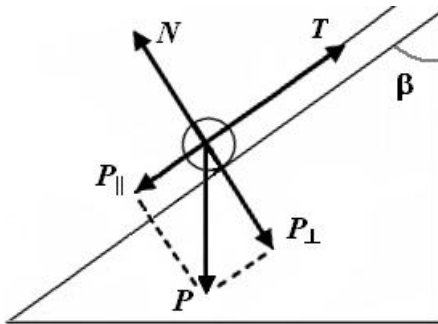


Рис. 1.2

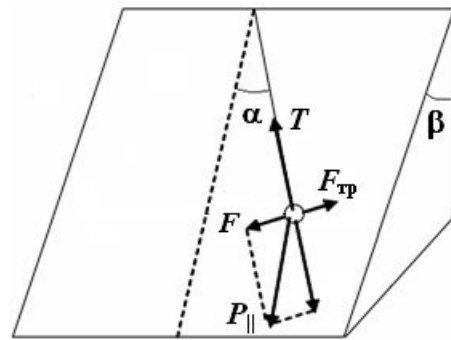


Рис. 1.3

Уравнение движения (1.2) катящегося шара с учетом выражения (1.3) для возвращающей силы F будет иметь вид

$$ma = -\frac{5}{7}mg \cos\beta \sin\alpha. \quad (1.4)$$

Знак минус означает, что возвращающая сила направлена в сторону, противоположную смещению от положения равновесия.

При малых углах отклонения, когда $\sin\alpha = \alpha = x/L$, где x – смещение шара от положения равновесия; L – длина маятника, выражение (1.4) можно записать

$$ma = -\frac{5}{7}mg \cos\beta \frac{x}{L} = -kx, \quad (1.5)$$

где

$$k = \frac{5}{7} \frac{mg \cos\beta}{L}.$$

Запишем уравнение движения (1.5) в дифференциальном виде, с учетом того, что ускорение есть вторая производная смещения по времени:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0. \quad (1.6)$$

Уравнение (1.6) является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка, аналогичным уравнению движения пружинного и математического маятника.

Решением дифференциального уравнения (1.6) является кинематическое уравнение движения вида

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

согласно которому маятник совершает незатухающие гармонические колебания с амплитудой A , начальной фазой φ_0 , циклической частотой ω и периодом колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{7L}{5g \cos\beta}}. \quad (1.7)$$

2. Уравнение колебаний наклонного маятника с учетом постоянной по величине силы трения качения. Уравнение движения (1.5) для катящегося шара с учетом силы трения качения $F_{\text{тр}}$ будет имеет вид

$$ma = -kx \pm F_{\text{тр}}, \quad (1.8)$$

где знак минус у силы трения соответствует движению от положения равновесия, знак плюс – к положению равновесия, то есть сила трения постоянна по величине и переменна по направлению.

Запишем уравнение (1.8) в дифференциальной форме:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \pm \frac{F_{\text{тр}}}{m}. \quad (1.9)$$

Фактически мы имеем два уравнения, описывающих движение шара в противоположных направлениях. Решения уравнений (1.9) имеют вид

$$x(t) = \pm \frac{F_{\text{тр}}}{k} + A(t) \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (1.10)$$

Период колебаний наклонного маятника, как и в случае отсутствия сил трения (см. формулу (1.7)), равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{7L}{5g \cos\beta}}. \quad (1.11)$$

Закон убывания амплитуды $A(t)$ определяется характером силы, вызывающей затухание. Для силы трения качения, не зависящей от скорости, можно считать, что амплитуда убывает по арифметической прогрессии, в противоположность случаю вязкого трения, когда сила трения прямо пропорциональна скорости и амплитуда убывает экспоненциально.

График затухающих колебаний $x(t)$ наклонного маятника представлен на рис. 1.4 (сплошная линия). График зависимости амплитуды $A(t)$ имеет вид прямой линии (пунктирная линия на рис. 1.4).

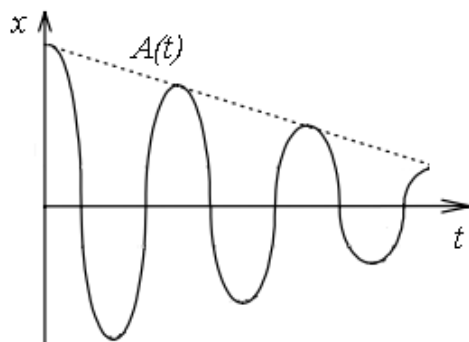


Рис. 1.4



Рис. 1.5

3. *Зависимость периода колебаний от угла наклона плоскости.* Зависимость периода колебаний T наклонного маятника от угла наклона плоскости β (1.11) можно представить в виде

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{7L}{5g \cos \beta}. \quad (1.12)$$

Если построенный по результатам эксперимента график зависимости T^2 от $1/\cos \beta$ будет иметь вид прямой линии (рис. 1.5), то это будет подтверждением справедливости уравнения (1.12).

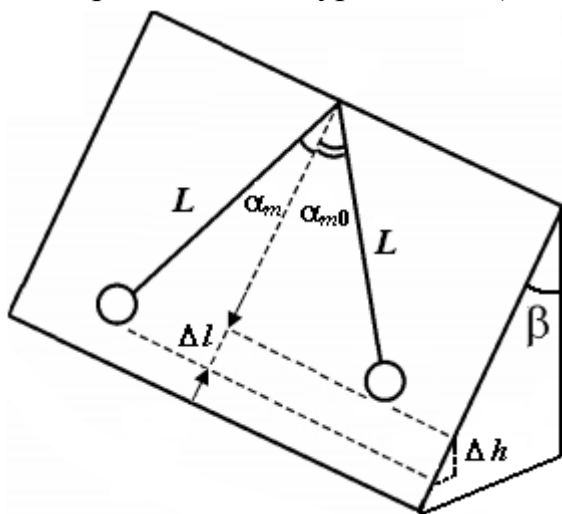


Рис. 1.6

4. *Определение коэффициента трения качения шара.* Если маятник вывести из положения равновесия и отпустить, он будет катиться по наклонной плоскости по дуге окружности радиусом L (рис. 1.6). Амплитуда колебаний со временем уменьшается, так как энергия маятника расходуется на преодоление сил трения качения. На рис. 1.6 изображены положения шарика в начальный момент времени и через половину периода колебаний.

Изменение энергии наклонного маятника за половину периода равно разности потенциальных энергий шара в двух крайних положениях:

$$\Delta E = mg\Delta h = mg \Delta l \cos \beta = mgL (\cos \alpha_m - \cos \alpha_{m0}) \cos \beta, \quad (1.13)$$

где α_{m0} и α_m – углы отклонения маятника от положения равновесия в начальный момент времени и через половину периода соответственно.

С учетом того, что при малых углах $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$, выражение (1.13) можно переписать в виде

$$\Delta E = \frac{1}{2} mgL (\alpha_{m0}^2 - \alpha_m^2) \cos \beta. \quad (1.14)$$

Работу сил трения качения за половину периода на пути, равном длине дуги окружности $L(\alpha_{m0} + \alpha_m)$, можно рассчитать следующим образом:

$$A_{\text{тр}} = F_{\text{тр}}L(\alpha_{m0} + \alpha_m) = fNL(\alpha_{m0} + \alpha_m), \quad (1.15)$$

где сила нормального давления $N = mg \sin\beta$ (см. рис. 1.2).

Приравняв работу сил трения качения (1.15) изменению потенциальной энергии (1.14), получим уменьшение амплитуды колебаний за половину периода:

$$\alpha_{m0} - \alpha_m = 2ftg\beta. \quad (1.16)$$

Из анализа выражения (1.16) следует, что изменение амплитуды колебаний одинаково для каждого полупериода. Следовательно, изменение амплитуды $\Delta\alpha_m$ за n целых периодов (колебаний) равно

$$\frac{\Delta\alpha_m}{n} = 4ftg\beta, \quad (1.17)$$

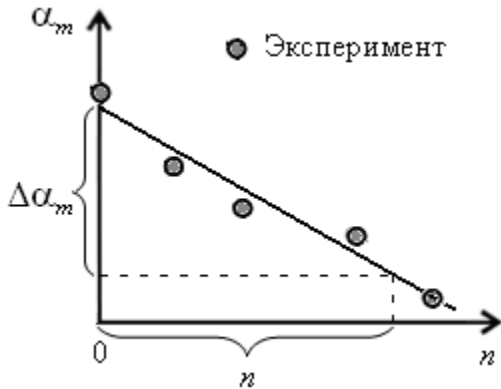


Рис. 1.7

и зависимость амплитуды колебаний от числа колебаний $\alpha_m(n)$ имеет линейный характер (рис. 1.7).

Из выражения (1.17) можно получить расчетную формулу для коэффициента трения качения:

$$f = \frac{1}{4tg\beta} \frac{\Delta\alpha_m}{n}, \quad (1.18)$$

где изменение амплитуды $\Delta\alpha_m$ выражено в радианах.

Поскольку в лабораторной установке шкала для измерения углов проградуирована в градусах, то выражение (1.18) примет вид

$$f = \frac{1}{4tg\beta} \frac{\Delta\alpha_m}{n} \frac{\pi}{180}, \quad (1.19)$$

где изменение амплитуды $\Delta\alpha_m$ выражено в градусах.

Значение $\frac{\Delta\alpha_m}{n}$ может быть определено как угловой коэффициент прямой — графика зависимости $\alpha_m(n)$, построенного по результатам эксперимента (рис. 1.7).

Описание экспериментальной установки

Схема лабораторной установки «Наклонный маятник» показана на рис. 1.8.

Наклонный маятник собран на платформе 1, оснащенной регулировочными винтами 2, позволяющими устанавливать платформу в горизонтальное положение. На платформе закреплена поворотная штанга 3, положение которой изменяется ручкой 4, а угол наклона β к вертикали отсчитывается по шкале 5.

В верхнем кронштейне 6 штанги размещается механизм подвеса 7 маятника, который позволяет регулировать его длину. Маятник представляет собой тонкую эластичную нить 8 с шаром 9. Шар имеет указательную стрелку 10, предназначенную для пересечения оптической оси фотоэлектрического датчика 11, который выдает электрический сигнал на микросекундомер. Цифровые индикаторы времени «ВРЕМЯ» и количества полных периодов колебаний маятника «ПЕРИОДЫ» расположены на лицевой панели блока управления и измерений 12.

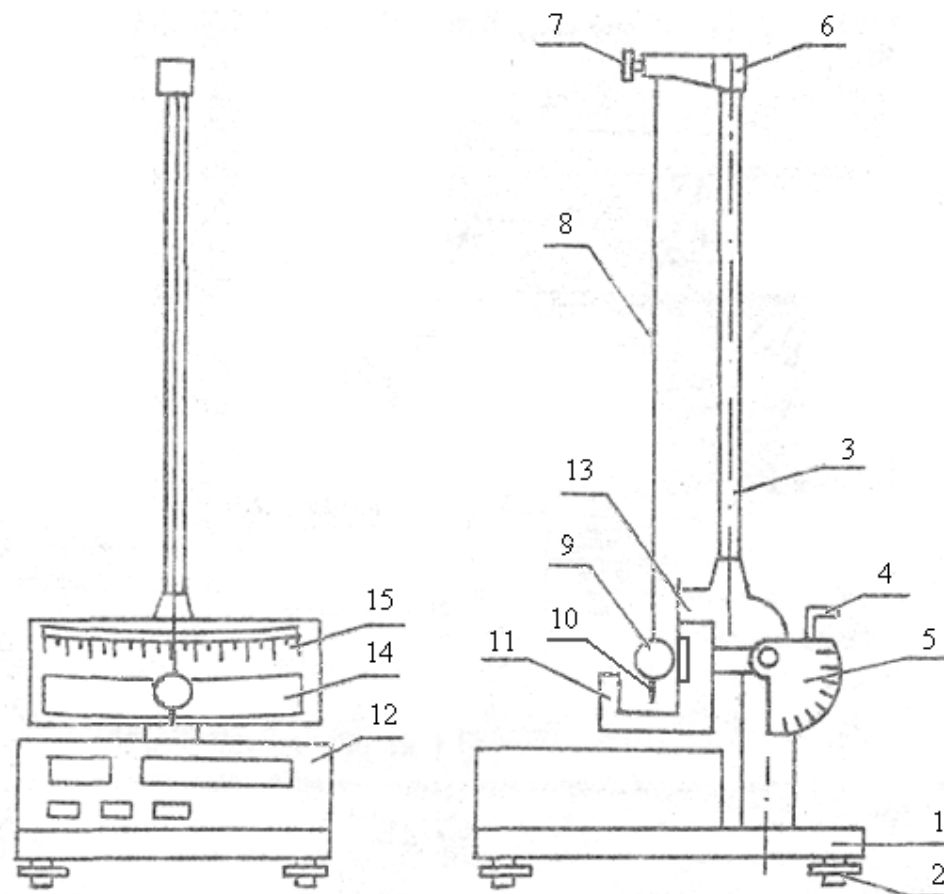


Рис. 1.8

На нижнем кронштейне 13 штанги расположены плоская полированная пластина 14, по которой происходит качение шара, и шкала отсчета 15 амплитуды колебаний маятника.

На лицевой панели блока управления и измерений 12 размещены кнопки «СЕТЬ», «СБРОС» и «СТОП»:

«СЕТЬ» – включение / выключение питающего напряжения миллисекундомера. Кнопка имеет фиксацию.

«СБРОС» – обнуление индикаторов времени и числа колебаний, генерирование сигнала на начало измерений. Кнопка без фиксации.

«СТОП» – генерирование сигнала разрешения на окончание процесса счета. После нажатия этой кнопки счет прекращается не сразу, а только после того, как маятник завершит очередное колебание. Кнопка без фиксации.

Порядок выполнения измерений

Подготовка установки к работе

1. Включите установку в сеть напряжением 220 В (*выполняется лаборантом или преподавателем*).

2. Установите поворотную штангу 3 в вертикальное положение с помощью ручки 4, угол наклона β штанги к вертикали по шкале 5 должен быть равен 0.

3. Произведите регулировку положения платформы 1 при помощи винтов 2 так, чтобы стрелка 10 на шаре в положении равновесия совпала с нулевым делением шкалы 15.

4. Отрегулируйте длину нити 8 с помощью механизма подвеса 7 на верхнем кронштейне так, чтобы при колебаниях шарик 9 перемещался по поверхности полированной пластины 14.

5. Нажмите кнопку «СЕТЬ» на лицевой панели блока, при этом должны засветиться цифровые индикаторы и лампочка фотоэлектрического датчика 11.

Задание 1. Измерить период колебаний наклонного маятника

1. Отклоните маятник на угол $\alpha = 10^\circ$ от положения равновесия так, чтобы стрелка на шарике была направлена строго вдоль нити.

2. Нажмите кнопку «СБРОС» и отпустите маятник. Наблюдайте за тем, как маятник совершает колебательные движения и при этом миллисекундомер производит отсчет времени и числа колебаний (периодов).

3. После совершения маятником определенного числа колебаний нажмите кнопку «СТОП». После того, как маятник *завершит очередное колебание*, счет прекратится, и на индикаторах зафиксируются показания времени t и числа колебаний n .

4. Освойтесь с работой установки, проведя несколько пробных измерений по пунктам 1–3 времени t и числа колебаний n маятника.

5. Занесите в табл. 1.1 название материала шара и значение длины нити L , указанное на корпусе установки.

6. Установите угол наклона маятника β (*задается преподавателем из интервала $30 \dots 60^\circ$*) и запишите его значение в табл. 1.1.

7. Проведите серию из трех измерений по пунктам 1–3 времени t и числа колебаний n рамки маятника. Показания индикаторов t и n занесите в табл. 1.1. *Число колебаний маятника в одном измерении в этом и последующих опытах должно быть не менее 10.*

Материалы шар – плоскость _____

Таблица 1.1

| $L, \text{ м}$ | $\beta, ^\circ$ | № | n | $t, \text{ с}$ | $T = \frac{t}{n}, \text{ с}$ | $\langle T \rangle, \text{ с}$ | $T_{\text{теор}}, \text{ с}$ по ф-ле (1.11) | $E, \%$ |
|----------------|-----------------|---|-----|----------------|------------------------------|--------------------------------|--|---------|
| | | 1 | | | | | | |
| | | 2 | | | | | | |
| | | 3 | | | | | | |

Задание 2. Исследовать зависимость периода колебаний от угла наклона пластины β

1. Выполните пункты 6 и 7 задания 1 для пяти различных значений угла β из интервала $30 \dots 60^\circ$.

2. Экспериментальные данные занесите в табл. 1.2.

Таблица 1.2

| № | $\beta, ^\circ$ | № | n | $t, \text{ с}$ | $T = \frac{t}{n}, \text{ с}$ | $\langle T \rangle, \text{ с}$ | $\langle T \rangle^2, \text{ с}^2$ | $1/\cos\beta$ |
|-----|-----------------|---|-----|----------------|------------------------------|--------------------------------|------------------------------------|---------------|
| 1 | | 1 | | | | | | |
| | | 2 | | | | | | |
| | | 3 | | | | | | |
| ... | | 1 | | | | | | |
| | | 2 | | | | | | |
| | | 3 | | | | | | |

Задание 3. Проверить закон линейной зависимости амплитуды от числа колебаний

1. Установите угол наклона маятника β (задается преподавателем из интервала $30...60^\circ$) и запишите его значение в табл. 1.3.
2. Отклоните шар на угол $\alpha_{m0} = 10^\circ$ от положения равновесия.
3. Измерьте амплитуды не менее 5 последовательных колебаний, соответствующие 1-му, 2-му и т.д. колебанию, и запишите их значения в табл. 1.3.
4. Повторить опыт (пункты 2 и 3) еще два раза.

Таблица 1.3

| $\beta, ^\circ$ | Число колебаний n | Амплитуда $\alpha_m, ^\circ$ | | | |
|-----------------|---------------------|------------------------------|----------|----------|------------------|
| | | 1-й опыт | 2-й опыт | 3-й опыт | Среднее значение |
| | 0 | | | | |
| | 1 | | | | |
| | 2 | | | | |
| | ... | | | | |

Обработка результатов эксперимента

1. По данным табл. 1.1 рассчитайте и занесите в табл. 1.1: экспериментальное значение периода колебаний T наклонного маятника; среднее значение периода $\langle T \rangle$; теоретическое значение периода колебаний $T_{теор}$ по формуле (1.11).
2. Сравните экспериментальное и теоретическое значения периодов, рассчитав относительную погрешность по формуле $E = \frac{|T_{теор} - \langle T \rangle|}{T_{теор}} 100\%$. Результат занесите в табл. 1.1.
3. По данным табл. 1.2 рассчитайте и занесите в табл. 1.2: экспериментальные значения периодов колебаний T наклонного маятника; для каждого угла наклона маятника β среднее значение $\langle T \rangle$ и величину $\langle T \rangle^2$; величину $1/\cos\beta$.
4. По данным табл. 1.2 постройте график зависимости $\langle T \rangle^2$ от $1/\cos\beta$.
5. По данным табл. 1.3 по результатам трех опытов рассчитайте средние значения амплитуд α_m .
6. По данным табл. 1.3 постройте график зависимости α_m от n , используя средние значения амплитуды.
7. Из построенного графика определите угловой коэффициент прямой $\frac{\Delta\alpha_m}{n}$, где $\Delta\alpha_m$ – изменение амплитуды за n колебаний (см. рис. 1.7).
8. Рассчитайте коэффициент трения качения f по формуле (1.19).

Результат работы

1. Запишите экспериментальное значение периода колебаний наклонного маятника и погрешность результата в виде

$$T = \quad \text{с}; \quad E = \quad \%$$

2. Запишите вывод о том, подтверждается ли справедливость выражения (1.12).

3. Запишите вывод о том, подтверждается ли справедливость выражения (1.19).

4. Запишите экспериментальное значение коэффициента трения качения и сравните его с табличным значением, рассчитав относительную погрешность E .

$$f = \quad ; \quad E = \quad \%$$

Контрольные вопросы

1. Что представляет собой наклонный маятник? Какое движение совершает наклонный маятник?

2. Какое движение называется колебательным? Какие колебания называются собственными (свободными)? Какие колебания называются гармоническими?

3. Запишите кинематическое уравнение движения для незатухающих колебаний. Дайте определения всем величинам, входящим в это уравнение.

4. Что называется амплитудой, частотой, периодом и фазой колебаний? От чего зависят частота, период, амплитуда и начальная фаза собственных незатухающих колебаний маятника?

5. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения и запишите выражающее его уравнение. Дайте определения всем величинам, входящим в это уравнение.

6. Выведите дифференциальное уравнение движения (1.9) наклонного маятника.

7. Запишите кинематическое уравнение движения для колебаний наклонного маятника.

8. Как влияет наличие постоянной по величине силы трения качения в колебательной системе на ее период и амплитуду?

9. Как изменяются с течением времени смещение и амплитуда колебаний наклонного маятника? Показать графически.

10. От чего зависит период колебаний наклонного маятника?

11. Как и почему изменится период колебаний наклонного маятника при увеличении угла наклона к вертикали?

12. Как при выполнении лабораторной работы экспериментально определяли период колебаний наклонного маятника?

13. Каков вид зависимости амплитуды колебаний наклонного маятника от времени при действии постоянной по величине силы трения качения? Показать графически.

14. Каков вид зависимости амплитуды колебаний наклонного маятника от времени при действии силы трения прямо пропорциональной скорости? Показать графически.

15. Какой результат проделанной лабораторной работы подтверждает справедливость формулы (1.12)?

16. Какой результат проделанной лабораторной работы подтверждает справедливость формулы (1.19)?

17. При каком виде движения с трением (скольжении или качении) потери энергии меньше?

18. В чем заключается метод определения коэффициента трения качения, применяемый в данной работе?

Лабораторная работа № 2

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ КРУТИЛЬНОГО МАЯТНИКА (ТОРСИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ)

Цель работы. Изучить основные характеристики собственных крутильных колебаний механической системы с одной степенью свободы; определить коэффициент крутильной жесткости, научиться определять моменты инерции тел.

Приборы и принадлежности. Лабораторная установка «Крутильный маятник», набор тел различной формы и массы, микрометр, штангенциркуль, линейка.

Краткие теоретические сведения

Принципиальная схема *крутильного маятника* изображена на рис. 2.1. Твердое тело подвешено с помощью двух натянутых упругих связей (стальных проволок), расположенных на одной вертикали, и может совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси, так называемые торсионные колебания.

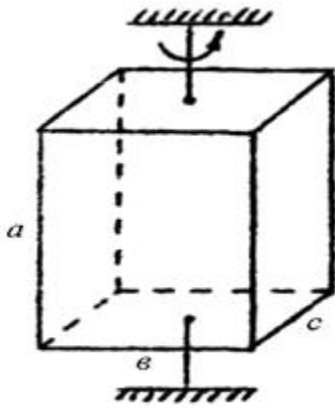


Рис. 2.1.

При повороте тела на угол α проволока закручивается и возникает *крутящий момент* M сил упругости, стремящийся вернуть тело в положение равновесия – *возвращающий момент* силы. Если углы закручивания не слишком велики, а проволока достаточно тонкая и длинная, то деформации сдвига, возникающие в ней, являются упругими. Согласно закону Гука для упругой деформации крутящий момент M пропорционален углу α :

$$M = -k\alpha, \quad (2.1)$$

где k – коэффициент крутильной жесткости, определяемый геометрическими размерами проволоки и упругими свойствами ее материала – постоянная для данного маятника величина. Для системы из двух проволок круглого сечения коэффициент k рассчитывается по формуле

$$k = \frac{\pi d^4 G}{32} \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right), \quad (2.2)$$

где d – диаметр проволоки; l_1 и l_2 – длина верхней и нижней проволок; G – модуль упругости при сдвиге материала проволоки.

Для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, *основной закон динамики вращательного движения* имеет вид:

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = \sum M, \quad (2.3)$$

где $\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = \varepsilon$ – угловое ускорение; J и $\sum M$ – момент инерции тела и сумма моментов внешних сил относительно оси вращения соответственно. Пренебрегая моментом сил трения и сопротивления воздуха, подставив (2.1) в (2.3) получим

уравнение движения крутильного маятника, выведенного из положения равновесия и предоставленного самому себе:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{k}{J}\alpha = 0. \quad (2.4)$$

Это уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка, аналогичным уравнению движения математического или пружинного маятника.

Решением уравнения (2.4) является кинематическое уравнение движения вида

$$\alpha = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (2.5)$$

согласно которому маятник совершает *незатухающие гармонические колебания* с амплитудой A , начальной фазой φ_0 , циклической частотой ω и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{k}}. \quad (2.6)$$

В этом нетрудно убедиться, подставив функцию (2.5) с учетом (2.6) в уравнение (2.4).

Если вращающееся тело – составное (в данной работе это рамка с закрепленным в ней исследуемым телом), то *период собственных незатухающих колебаний* равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_p + J}{k}}, \quad (2.7)$$

где J_p и J – моменты инерции рамки и исследуемого тела относительно оси маятника соответственно.

Преобразуем формулу (2.7), выразив момент инерции тела:

$$J = k \frac{T^2}{4\pi^2} - J_p. \quad (2.8)$$

В данной лабораторной работе для экспериментального нахождения неизвестных значений коэффициента крутильной жесткости k и момента инерции самой рамки J_p измеряют периоды колебаний тел простой геометрической формы: цилиндра и прямоугольного параллелепипеда (бруска), моменты инерции которых можно рассчитать по известным массам и геометрическим размерам.

Момент инерции однородного прямоугольного параллелепипеда (бруска) массой m с длинами ребер a , b и c (в нашем случае $a > b > c$) относительно оси, проходящей через центр масс бруска параллельно ребру a , рассчитывается по формуле

$$J_a = \frac{m(b^2 + c^2)}{12}. \quad (2.9)$$

Эта ось является одной из трех *главных осей* прямоугольного параллелепипеда, назовем ее *осью «а»*.

Аналогично для *двух других главных осей: «b» и «с»*, параллельных ребрам b и c :

$$J_b = \frac{m(a^2 + c^2)}{12}; \quad (2.10)$$

$$J_c = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}. \quad (2.11)$$

Момент инерции однородного цилиндра (или диска) массой m и радиусом R относительно его геометрической оси рассчитывается по формуле

$$J_o = \frac{mR^2}{2}. \quad (2.12)$$

Формулы (2.9)–(2.12) дают значения моментов инерции тел относительно осей, проходящих через центр масс. Если положение центра масс тела не совпадает с осью вращения маятника, то момент инерции тела J относительно оси вращения маятника, следует рассчитывать на основании *теоремы Гюйгенса – Штейнера* по формуле

$$J_x = J_o + mx^2, \quad (2.13)$$

где J_o – момент инерции тела относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела; m – масса тела; x – расстояние между осями.

Описание экспериментальной установки

Схема лабораторной установки «Крутильный маятник» показана на рис. 2.2.

Электронный секундомер 1 и вертикальная стойка 3 прикреплены к горизонтальному основанию 2, оснащенному по углам регулировочными винтами. На стойке при помощи прижимных винтов закреплены кронштейны 4, 5, 6.

Кронштейны 4 и 6 имеют зажимы, служащие для закрепления стальной проволоки, на которой подвешена рамка 7. На кронштейне 5 закреплена стальная плита 8. На ней размещены фотоэлектрический датчик 9, электромагнит 10, положение которого на плите можно изменять, и угловая шкала 11. К электромагниту прикреплена стрелка, которая указывает на угловой шкале 11 его зафиксирован-

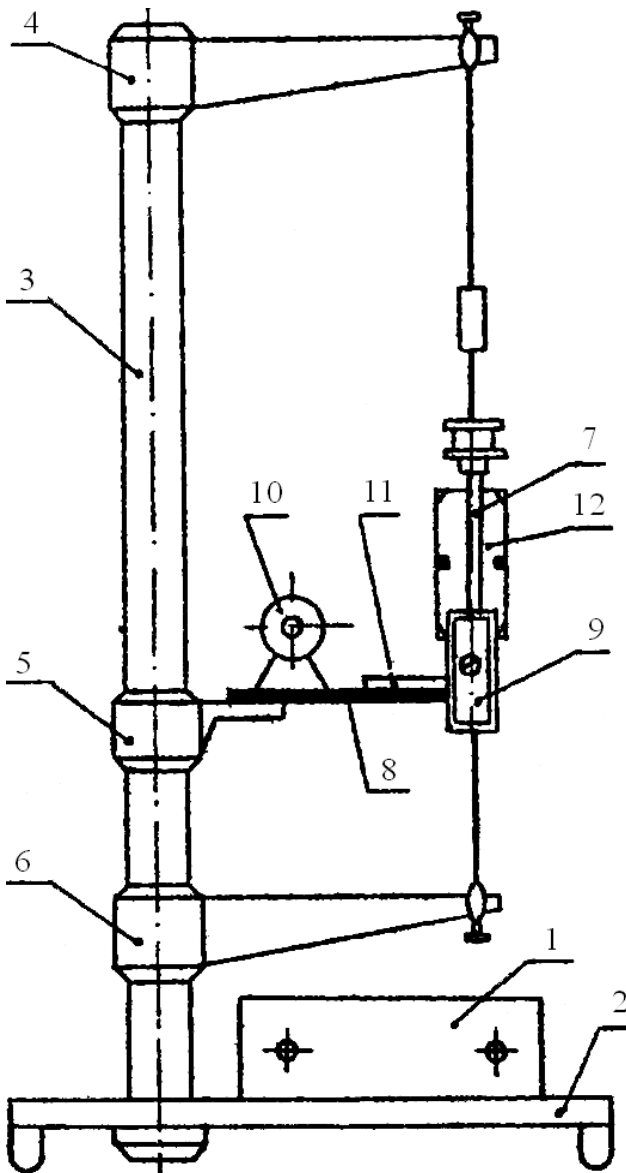


Рис. 2.2

ное положение относительно фотоэлектрического датчика. Конструкция рамки позволяет закреплять на ней тела 12 разной формы и размера. Эти тела крепятся зажимным винтом на подвижной балке, которая перемещается вертикально по направляющим между неподвижными балками. В нужном положении подвижная балка затягивается двумя гайками на зажимных втулках. Фотоэлектрический датчик и электромагнит соединены с секундомером.

На лицевой панели секундомера имеются *два индикатора* для отсчета времени и числа колебаний и *четыре кнопки*:

«СЕТЬ» – включение / выключение питающего напряжения. Кнопка имеет фиксацию.

«СБРОС» – зануление индикаторов времени и числа колебаний, генерирование сигнала на начало измерений и включение обмотки электромагнита. Кнопка без фиксации.

«ПУСК» – отключение обмотки электромагнита. Кнопка имеет фиксацию.

«СТОП» – генерирование сигнала разрешения на окончание процесса счета. После нажатия этой кнопки счет прекращается не сразу, а только после того, как маятник завершит очередное колебание. Кнопка без фиксации.

Порядок выполнения измерений

Подготовка установки к работе

Включите установку в сеть напряжением 220 В (*выполняется лаборантом или преподавателем*).

Установите и зафиксируйте электромагнит в таком положении, чтобы начальный угол отклонения маятника φ_0 не превышал $30...40^\circ$ (*выполняется лаборантом или преподавателем*).

Нажмите клавишу «СЕТЬ». Должны засветиться: лампочка фотоэлектрического датчика и индикаторы секундомера.

Проведение измерений

1. Отожмите кнопку «ПУСК» (включить электромагнит).
2. Поверните рамку маятника так, чтобы флажок на рамке был прижат к сердечнику электромагнита. Рамка фиксируется магнитом в неподвижном состоянии.
3. Нажмите клавишу «СБРОС». На индикаторах должны быть нули.
4. Нажмите клавишу «ПУСК». Рамка отпускается и совершает крутильные колебания. При этом секундомер отсчитывает время и число колебаний.
5. После совершения рамкой определенного числа колебаний нажмите клавишу «СТОП». После того, как маятник *завершит очередное колебание*, счет прекратится, и на индикаторах зафиксируются показания времени и числа колебаний.
6. Освойтесь с работой установки, проведя несколько пробных измерений по пунктам 1–5 времени t и числа колебаний n рамки маятника (без установленного в ней тела).

7. Проведите серию из трех измерений по пунктам 1–5 времени t и числа колебаний n рамки маятника. Показания индикаторов t и n занесите в табл. 2.1. Число колебаний маятника в одном измерении в этом и последующих (пункты 8–10) опытах должно быть не менее 10.

8. Закрепите в рамке первое исследуемое тело – брусок – так, чтобы одна из его главных осей « a » совпала с осью вращения. Проведите серию из трех измерений по пунктам 1–5 времени t и числа колебаний n . Показания индикаторов t и n занесите в табл. 2.1.

Аналогичные измерения проведите для двух других главных осей бруска: « b » и « c ». Соответствующие показания индикаторов также занесите в табл. 2.1.

9. Закрепите в рамке второе исследуемое тело – однородный цилиндр – так, чтобы его геометрическая ось **совпала** с осью вращения. Проведите серию из трех измерений по пунктам 1–5 времени t и числа колебаний n . Показания индикаторов t и n занесите в табл. 2.1.

10. Закрепите в рамке второе исследуемое тело – однородный цилиндр – так, чтобы его геометрическая ось **не совпала** с осью вращения, но была параллельна ей и отстояла на расстояние $x = 15 \dots 20$ мм. Значение x запишите в табл. 2.2. Проведите серию из трех измерений по пунктам 1–5 времени t и числа колебаний n . Показания индикаторов t и n занесите в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Измерения периода колебаний маятника

| Измерения | | № | n | $t, \text{с}$ | $T = \frac{t}{n}, \text{с}$ | $\langle T \rangle, \text{с}$ | $\frac{\langle T \rangle^2}{4\pi^2}, \text{с}^2$ | $J, \text{кг}\cdot\text{м}^2$ |
|--------------------------|-------------|---|-----|---------------|-----------------------------|-------------------------------|--|-------------------------------|
| Рамка без тела (пункт 7) | | 1 | | | | | | 0 |
| | | 2 | | | | | | |
| | | 3 | | | | | | |
| Брусок (пункт 8) | Ось « a » | 1 | | | | | | |
| | | 2 | | | | | | |
| | | 3 | | | | | | |
| | Ось « b » | 1 | | | | | | |
| | | 2 | | | | | | |
| | | 3 | | | | | | |
| | Ось « c » | 1 | | | | | | |
| | | 2 | | | | | | |
| | | 3 | | | | | | |
| Цилиндр | Пункт 9 | 1 | | | | | | |
| | | 2 | | | | | | |
| | | 3 | | | | | | |
| | Пункт 10 | 1 | | | | | | |
| | | 2 | | | | | | |
| | | 3 | | | | | | |

11. Измерьте с помощью штангенциркуля размеры бруска: a , b и c (в нашем случае $a > b > c$). Измерения каждой грани выполните три раза, рассчитайте средние значения a , b и c , запишите результаты в табл. 2.2. Запишите в табл. 2.2 массу бруска (масса указана на самом бруске).

12. Измерьте с помощью штангенциркуля диаметр D цилиндра. Измерения выполните три раза по трем направлениям, рассчитайте среднее значение

диаметра и радиуса R , запишите результаты в табл. 2.2. Запишите в табл. 2.2 массу цилиндра (масса указана на самом теле).

Таблица 2.2

Параметры исследуемых тел

| Брусек | | | | | | | |
|---------|----------|----------|----------|----------|---|---|---|
| № | a , мм | b , мм | c , мм | m , кг | $J_a = \frac{m(b^2 + c^2)}{12}$, кг·м ² | $J_b = \frac{m(a^2 + c^2)}{12}$, кг·м ² | $J_c = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}$, кг·м ² |
| 1 | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| Ср. | | | | | | | |
| Цилиндр | | | | | | | |
| № | D , мм | R , мм | m , кг | x , мм | $J_o = \frac{mR^2}{2}$, кг·м ² | $J_x = J_o + mx^2$, кг·м ² | |
| 1 | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| Ср. | | | | | | | |

13. Измерьте с помощью микрометра с наибольшей возможной точностью диаметр проволоки d . Измерения выполните не менее трех раз в разных местах проволоки, заносая результаты в табл. 2.3. Рассчитайте среднее значения d и запишите его в табл. 2.3. Измерьте линейкой длину верхней и нижней проволок l_1 и l_2 и запишите полученные значения в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Параметры упругой проволоки

| № | d , мм | l_1 , мм | l_2 , мм | G , Н/м ² | $k_{теор} = \frac{\pi d^4 G}{32} \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right)$, Н·м/рад | k , Н·м/рад | E , % |
|-----|----------|------------|------------|------------------------|--|---------------|---------|
| 1 | | | | $79,3 \cdot 10^9$ | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| Ср. | | | | | | | |

Обработка результатов эксперимента

Определение момента инерции рамки J_p и коэффициента крутильной жесткости k

1. Вычислите моменты инерции бруска относительно трех главных осей. Вычисления ведутся по формулам (2.9), (2.10) и (2.11) с использованием данных табл. 2.2. В расчетах используйте средние значения измеренных величин. Результаты запишите в табл. 2.2.

2. Вычислите моменты инерции цилиндра относительно его геометрической оси и относительно параллельной ей оси, не проходящей через центр масс цилиндра. Вычисления ведутся по формулам (2.12) и (2.13) с использованием данных табл. 2.2. В расчетах используйте средние значения измеренных величин. Результаты запишите в табл. 2.2.

3. Используя данные табл. 2.1, вычислите периоды колебаний T маятника для каждого отдельного измерения.

Для каждого опыта по результатам трех измерений рассчитайте среднее значение периода $\langle T \rangle$ и величину $\frac{\langle T \rangle^2}{4\pi^2}$. Результаты запишите в табл. 2.1.

Перенесите из табл. 2.2 в табл. 2.1 соответствующие каждому опыту расчетные значения моментов инерции J исследуемых тел.

4. Постройте *график* экспериментальной зависимости, откладывая на оси абсцисс величину $\frac{\langle T \rangle^2}{4\pi^2}$, а на оси ординат соответствующие значения моментов инерции J тел, закрепленных в рамке маятника.

Примечание: ось абсцисс следует разместить приблизительно посередине графика.

Согласно формуле (2.8) эта зависимость должна быть линейной, так как это *уравнение прямой* с угловым коэффициентом k , которая пересекает ось моментов инерции в точке с координатой $J = -J_p$.

5. По графику определите экспериментальное значение коэффициента крутильной жесткости k как угловой коэффициент:

$$k = \frac{\Delta J}{\Delta \left(\frac{\langle T \rangle^2}{4\pi^2} \right)}.$$

Запишите полученный результат в соответствующую ячейку табл. 2.3.

6. Вычислите по формуле (2.2) с использованием данных табл. 2.3 теоретическое значение коэффициента крутильной жесткости $k_{теор}$. В расчетах используйте среднее значение d и табличное значение модуля сдвига G . Результат запишите в табл. 2.3. Сравните теоретическое и экспериментальное значения коэффициента крутильной жесткости, рассчитав относительную погрешность по формуле $E = \frac{|k_{теор} - k|}{k_{теор}} 100\%$. Результат занесите в табл. 2.3.

7. По графику определите момент инерции рамки J_p экстраполяцией экспериментальной прямой в область отрицательных значений до пересечения с осью моментов инерции.

Результат работы

1. Запишите полученные экспериментально значения момента инерции рамки маятника, коэффициента крутильной жесткости и погрешность результата в виде

$$J_p = \quad \text{кг}\cdot\text{м}^2.$$
$$k = \quad \text{Н}\cdot\text{м}/\text{рад}; \quad E = \quad \%$$

2. Сделайте выводы по работе:

как влияет момент инерции тела на период крутильных колебаний; соответствует ли вид графика теоретической зависимости.

Контрольные вопросы

1. Что представляет собой крутильный маятник? Какое движение совершает крутильный маятник?
2. Какое движение называется колебательным? Какие колебания называются собственными (свободными)? Какие колебания называются гармоническими?
3. Запишите кинематическое уравнение движения для крутильных незатухающих колебаний. Дайте определения всем величинам, входящим в это уравнение.
4. Что называется амплитудой, частотой, периодом и фазой колебаний? От чего зависят частота, период, амплитуда и начальная фаза собственных незатухающих колебаний крутильного маятника?
5. Как при выполнении лабораторной работы экспериментально определяли период колебаний крутильного маятника?
6. Для одного из опытов рассчитайте частоту и начальную фазу колебаний и запишите кинематическое уравнение колебаний маятника с числовыми коэффициентами.
7. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения и запишите выражающее его уравнение. Дайте определения всем величинам, входящим в это уравнение.
8. Выведите уравнение движения крутильного маятника (2.4).
9. Как формулируется понятие момента инерции твердого тела, каков его физический смысл? От чего он зависит момент инерции тела?
10. Как можно рассчитать моменты инерции тел простой геометрической формы: цилиндра, диска, прямоугольного параллелепипеда?
11. Является ли момент инерции аддитивной величиной? Запишите формулу для периода колебаний крутильного маятника, если вращающееся тело – составное, то есть состоит из нескольких тел.
12. Сформулируйте теорему Гюйгенса – Штейнера и покажите, как она применяется в проделанной работе.
13. Запишите закон Гука для упругой деформации кручения. От чего зависит крутильный момент? Почему начальный угол отклонения маятника не должен быть слишком большим?
14. Каков физический смысл коэффициента крутильной жесткости k ? От чего он зависит?
15. Какой результат проделанной лабораторной работы подтверждает справедливость формулы (2.7)?
16. Какой экспериментальный график необходимо построить в лабораторной работе? Почему он не проходит через начало координат? Какую информацию несут точки пересечения этого графика с осями координат? Как по графику можно определить коэффициент крутильной жесткости k ?
17. Как с помощью крутильного маятника можно в опыте определить момент инерции тела неправильной формы и неизвестной массы?

Лабораторная работа № 3

ИЗУЧЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ СВЯЗАННОЙ СИСТЕМЫ, ИМЕЮЩЕЙ ДВЕ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ

Цель работы. Изучить основные закономерности свободных и вынужденных колебаний связанных систем; исследовать синфазные, антифазные колебания, биения и явление резонанса в системе связанных маятников.

Приборы и принадлежности. Лабораторная установка «Связанные маятники», набор грузов.

Краткие теоретические сведения

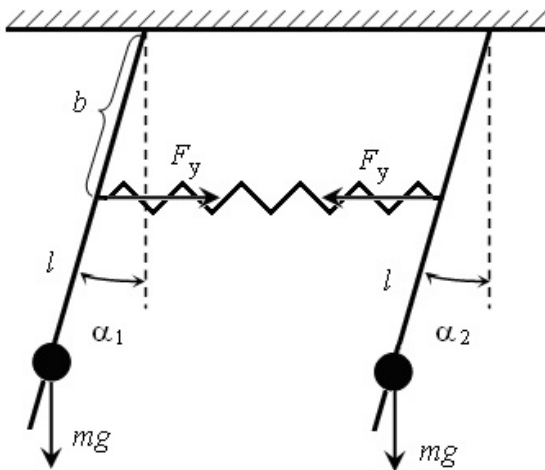


Рис. 3.1

Систему двух связанных маятников можно рассматривать как две взаимодействующие между собой отдельные колебательные системы с одной степенью свободы каждая. Такими системами являются, например, два маховика на упругом валу.

Изучение основных закономерностей колебательного движения механической системы с двумя степенями свободы будем проводить на примере колебаний двух одинаковых маятников, соединенных упругой связью. Схема такой колебательной системы приведена на рис. 3.1.

Маятники состоят из стержней длиной l , связанных невесомой пружиной с коэффициентом жесткости k , и закрепленных на них грузы массой m .

При движении маятников в одной вертикальной плоскости состояние такой системы полностью описывается двумя независимыми параметрами – углами α_1 и α_2 отклонения маятников от положения равновесия, то есть система имеет две степени свободы.

Основной закон динамики для движения маятника, выведенного из положения равновесия и предоставленного самому себе, имеет вид

$$J\varepsilon = \Sigma M, \quad (3.1)$$

где J – момент инерции маятника относительно оси подвеса; ε – угловое ускорение маятника; ΣM – сумма моментов сил, действующих на маятник, относительно оси подвеса.

Поскольку масса стержня значительно меньше массы груза, а его длина значительно больше размеров груза, то момент инерции каждого маятника относительно оси подвеса можно считать равным

$$J = ml^2. \quad (3.2)$$

В случае маятников, связанных пружиной, на каждый маятник будут действовать два момента сил (силы тяжести и силы упругости), следовательно, для первого (левого на рис. 3.1) маятника

$$\Sigma M = -mg l \sin \alpha_1 + kb(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) b \cos \alpha_1, \quad (3.3)$$

где $l\sin\alpha_1$ – плечо силы тяжести; $b(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)$ – изменение длины пружины; b – расстояние от оси подвеса до точки крепления пружины; $b\cos\alpha_1$ – плечо силы упругости.

С учетом того, что при малых углах отклонения $\sin\alpha \approx \alpha$ и $\cos\alpha \approx 1$, выражение (3.3) можно переписать в виде

$$\Sigma M = -mgl\alpha_1 + kb^2(\alpha_2 - \alpha_1), \quad (3.4)$$

Угловое ускорение есть вторая производная от угла по времени

$$\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}. \quad (3.5)$$

Уравнение движения (3.1) первого маятника с учетом выражений (3.2), (3.4) и (3.5) примет вид дифференциального уравнения второго порядка:

$$ml^2 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} = -mgl\alpha_1 + kb^2(\alpha_2 - \alpha_1). \quad (3.6)$$

Записав для второго маятника уравнение, аналогичное (3.6), после преобразований получим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \left(\frac{g}{l} + \frac{kb^2}{ml^2} \right) \alpha_1 - \frac{kb^2}{ml^2} \alpha_2 = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{d^2\alpha_2}{dt^2} + \left(\frac{g}{l} + \frac{kb^2}{ml^2} \right) \alpha_2 - \frac{kb^2}{ml^2} \alpha_1 = 0. \quad (3.8)$$

Складывая и вычитая уравнения (3.7) и (3.8), получим два уравнения соответственно

$$\frac{d^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{dt^2} + \frac{g}{l}(\alpha_1 + \alpha_2) = 0, \quad (3.9)$$

$$\frac{d^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{dt^2} + \left(\frac{g}{l} + 2\frac{kb^2}{ml^2} \right) (\alpha_1 - \alpha_2) = 0.$$

Уравнения (3.9) имеют стандартный вид дифференциальных уравнений гармонических колебаний с циклическими частотами:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{kb^2}{ml^2}}. \quad (3.10)$$

Общее решение системы уравнений (3.9) имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= A \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \\ \alpha_1 - \alpha_2 &= B \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \end{aligned} \quad (3.11)$$

где A и B – амплитуды колебаний; φ_1 и φ_2 – начальные фазы колебаний, определяемые из начальных условий.

Уравнения (3.11) можно переписать через углы отклонения маятников:

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= \frac{A}{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{B}{2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \\ \alpha_2(t) &= \frac{A}{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{B}{2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Из выражений (3.12) следует, что каждый маятник осуществляет сложное колебание, которое не является гармоническим, тем не менее его можно представить в виде суммы двух гармонических колебаний с частотами ω_1 и ω_2 . Эти частоты называются собственными, потому что зависят от параметров колебательной системы (l, k, b, m) и не зависят от условий выведения системы из положения равновесия (начальных условий).

Для системы с двумя степенями свободы необходимо задать четыре начальных условия, которые позволяют однозначно определить четыре произвольных постоянных $A, B, \varphi_1, \varphi_2$. Из уравнений (3.12) получим выражения для отклонений и скоростей маятников в начальный момент времени при $t = 0$:

$$\begin{aligned} \alpha_1(0) &= \frac{A}{2} \cos \varphi_1 + \frac{B}{2} \cos \varphi_2, & \alpha_2(0) &= \frac{A}{2} \cos \varphi_1 - \frac{B}{2} \cos \varphi_2, \\ \frac{d\alpha_1}{dt}(0) &= -\frac{A}{2} \omega_1 \sin \varphi_1 - \frac{B}{2} \omega_2 \sin \varphi_2, & \frac{d\alpha_2}{dt}(0) &= -\frac{A}{2} \omega_1 \sin \varphi_1 + \frac{B}{2} \omega_2 \sin \varphi_2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Подбором начальных условий можно добиться возбуждения колебаний системы только с одной частотой. Такие колебания, при которых оба маятника колеблются с одной и той же частотой (ω_1 или ω_2), называются нормальными колебаниями. Частоты таких колебаний называются нормальными частотами. Число нормальных колебаний равно числу степеней свободы системы. Нормальные колебания двух связанных маятников могут происходить синфазно (с одинаковыми фазами) и антифазно (в противофазе, то есть сдвиг фаз равен π).

Исследование колебаний двух связанных маятников

Определение периодов синфазных и антифазных колебаний. Синфазные колебания описываются выражениями (3.12) при $B = 0$, что соответствует начальным условиям: оба маятника отклонены в одну сторону на один и тот же угол и имеют одинаковые по величине и направлению скорости (см. уравнения (3.13)).

Синфазные колебания маятников происходят с меньшей из собственных частот ω_1 (см. выражения (3.10)). Роль связи при таких колебаниях исчезает, так как пружина, связывающая маятники, не будет при их движении деформироваться.

Антифазные колебания описываются выражениями (3.12) при $A = 0$, что соответствует начальным условиям: маятники отклонены в противоположные стороны на один и тот же угол и имеют одинаковые по величине и противоположно направленные скорости (см. уравнения (3.13)).

Антифазные колебания маятников происходят с большей из собственных частот ω_2 (см. выражения (3.10)). В этом случае упругие силы со стороны пружины активно влияют на колебательный процесс.

Теоретически периоды синфазных и антифазных колебаний связанных маятников можно рассчитать через соответствующие частоты (см. выражения (3.10))

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}. \quad (3.14)$$

Определение периода биений. Биения – колебания с периодически изменяющейся амплитудой, возникающие в результате наложения двух гармонических колебаний с близкими частотами (рис. 3.2).

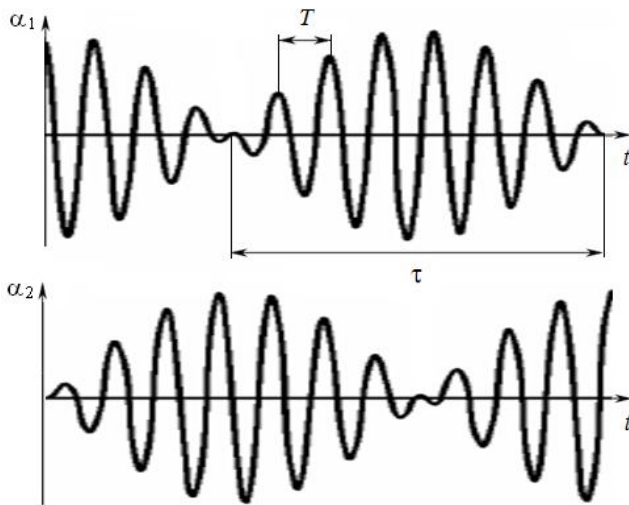


Рис. 3.2

Биения описываются выражениями (3.12) при произвольных начальных условиях. Наиболее наглядно биения выражены в случае $A = B$ и $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, что соответствует начальным условиям: один из маятников отклонен на угол α_0 , другой придерживается в положении равновесия (см. уравнения (3.13)). Под действием упругой пружины изначально покоящийся маятник все в большей степени будет вовлекаться в колебательный процесс. Причем при уменьшении амплитуды одного из маятников амплитуда второго увеличивается. В то

время, когда амплитуда одного из маятников будет максимальной, амплитуда другого маятника станет равной нулю. Поскольку общая энергия маятниковой системы остается постоянной, то будет происходить последовательная перекачка энергии от одного маятника к другому.

С учетом начальных условий система уравнений (3.12) примет вид:

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= \alpha_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right), \\ \alpha_2(t) &= \alpha_0 \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Если параметры колебательной системы подобраны так, что связь между маятниками является слабой, то есть значения собственных частот мало отличаются друг от друга: $(\omega_2 - \omega_1) \ll \omega_1$ (см. выражения (3.10)), то уравнения (3.15) будут соответствовать колебаниям с изменяющимися амплитудами и периодом T (см. рис. 3.2):

$$T = \frac{2\pi}{\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)}.$$

Промежуток между соседними моментами времени, в которые амплитуда обращается в нуль, называется периодом биений τ (рис. 3.2) и определяется выражением

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}, \quad (3.16)$$

где ω_2 и ω_1 – частоты антифазных и синфазных колебаний (см. выражения (3.10)). Период биения не зависит от способа возбуждения колебаний, поэтому для одной и той же маятниковой системы остается величиной постоянной.

Исследование вынужденных колебаний. Вынужденные гармонические колебания возникают в тех случаях, когда колебательная система подвергается

действию периодически изменяющегося момента внешней силы, получившего название вынуждающего момента:

$$M(t) = M_0 \cos \Omega t,$$

где M_0 и Ω – амплитуда и круговая частота вынуждающего момента.

Если на один из связанных маятников действует момент внешней силы $M(t)$, то возбуждаются вынужденные колебания связанной системы. Уравнения движения маятников в этом случае будут отличаться от (3.7) и (3.8) наличием этого вынуждающего момента в правой части уравнения (3.17):

$$\frac{d^2 \alpha_1}{dt^2} + \left(\frac{g}{l} + \frac{kb^2}{ml^2} \right) \alpha_1 - \frac{kb^2}{ml^2} \alpha_2 = \frac{M_0}{ml^2} \cos \Omega t, \quad (3.17)$$

$$\frac{d^2 \alpha_2}{dt^2} + \left(\frac{g}{l} + \frac{kb^2}{ml^2} \right) \alpha_2 - \frac{kb^2}{ml^2} \alpha_1 = 0. \quad (3.18)$$

Общее решение системы уравнений (3.16) и (3.17) имеет вид

$$\alpha_1(t) = \alpha_{m1} \cos(\Omega t - \psi_1), \quad \alpha_2(t) = \alpha_{m2} \cos(\Omega t - \psi_2), \quad (3.19)$$

где α_{m1} , α_{m2} – амплитуды колебаний маятников; ψ_1, ψ_2 – сдвиг фаз между вынуждающим моментом и колебаниями маятников; Ω – частота вынужденных колебаний маятников. Из уравнений (3.19) видно, что оба маятника связанной системы совершают вынужденные гармонические колебания с частотой Ω , равной частоте вынуждающего момента.

Амплитуды вынужденных колебаний связанных маятников равны:

$$\alpha_{m1} = \frac{M_0}{ml^2} \frac{\omega_2^2 - \Omega^2}{(\omega_1^2 - \Omega^2)(\omega_2^2 - \Omega^2) - \left(\frac{kb^2}{ml^2} \right)^2}, \quad (3.20)$$

$$\alpha_{m2} = \frac{M_0}{ml^2} \frac{kb^2}{ml^2} \frac{1}{(\omega_1^2 - \Omega^2)(\omega_2^2 - \Omega^2) - \left(\frac{kb^2}{ml^2} \right)^2}. \quad (3.21)$$

Из выражений (3.20) и (3.21) следует, что амплитуды колебаний маятников зависят от частоты вынуждающего момента. При частоте Ω вынуждающего момента, близкой к одной из собственных частот ω_1 или ω_2 , значение амплитуды колебаний резко возрастает.

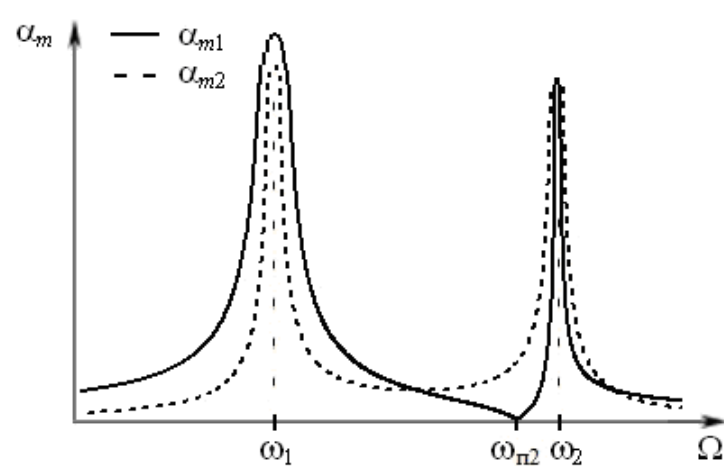


Рис. 3.3

Это явление носит название резонанса. График зависимости амплитуды колебаний от частоты вынуждающего момента называется резонансной кривой. В рассматриваемой колебательной системе резонансная кривая будет иметь два максимума на частотах ω_1 и ω_2 (рис. 3.3, сплошная линия).

Два максимума на резонансной кривой будут наблюдаться и для второго маятника, который соединен упругой связью с первым маятником (см. рис. 3.3, пунктирная линия).

Максимум на резонансных кривых при частоте ω_1 соответствует синфазным колебаниям, при частоте ω_2 – антифазным колебаниям.

Введем парциальную частоту колебаний, то есть частоту колебаний одного маятника, когда другой маятник находится в покое. Для определения парциальной частоты, не снимая пружины связи, возбуждают колебания одного маятника, при этом удерживая в положении равновесия другой. В исследуемой связанной системе парциальные частоты двух идентичных маятников одинаковы:

$$\omega_{п2} = \omega_{п1} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{kb^2}{ml^2}}.$$

При изменении частоты Ω от ω_1 до ω_2 амплитуда первого маятника уменьшается и достигает минимума на парциальной частоте $\omega_{п2}$ (см. рис. 3.3). при малых затуханиях амплитуда на этой частоте стремится к нулю, то есть наблюдается подавление колебаний первого маятника (к которому приложен вынуждающий момент) на парциальной частоте второго маятника. Такое подавление вызвано компенсацией момента вынуждающей силы моментом силы, действующей со стороны второго маятника. Этот эффект применяется на практике в механических успокоителях колебаний.

Описание экспериментальной установки

Общий вид установки для изучения связанных колебаний представлен на рис. 3.4.

Платформа 1 оснащена регулировочными винтами 2, позволяющими устанавливать платформу в горизонтальное положение. С платформой соединена колонка 3, на которой закреплены кронштейны 4 и 5.

На стержне 6 верхнего кронштейна находятся подвесы 7, на которых с помощью шариковых подшипников подвешены стержень 8 и два маятника. Каждый маятник состоит из стержня 9 и перемещаемого груза 10. На стержне 9 нанесены риски с интервалом 5 см. Маятники сопряжены друг с другом при помощи двух пружин 11, закрепленных в специальной П-образной обойме. Стержнем 8 через пружины 12 осуществляется возбуждение колебаний маятников при помощи приводного диска, закрепленного на валу электродвигателя. Электродвигатель находится в блоке управления и измерений 13.

Возбуждение колебаний маятниковой системы производится следующим образом. На валу электродвигателя расположен приводной диск, соединенный со стержнем 8 так, что при вращении диска стержень приходит в колебательное движение и через пружины 12 передает колебания заднему маятнику, который в свою очередь через пружины 11 вовлекает в колебательный процесс передний маятник.

К кронштейну 4 прикреплена угловая шкала 14, позволяющая определять амплитуду колебаний маятников, и фотоэлектрический датчик 15, предназначенный для измерения периода колебаний заднего маятника.

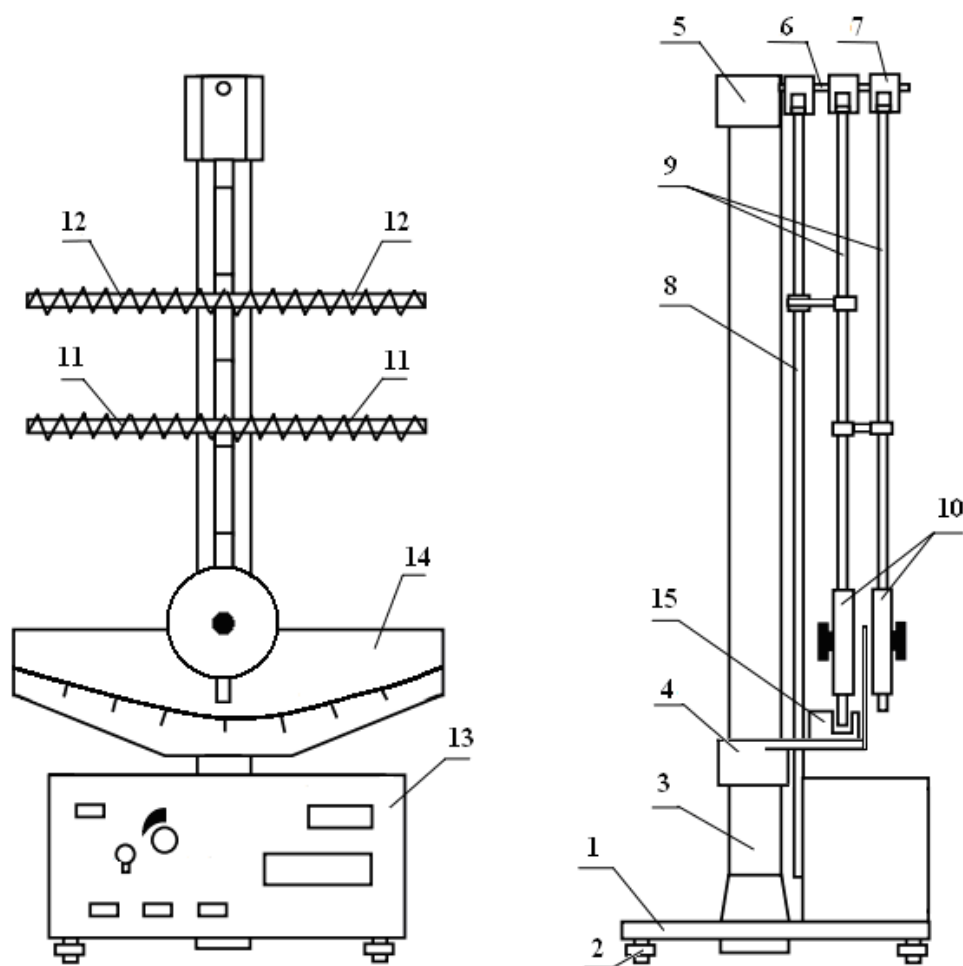


Рис. 3.4.

Во время движения стержень заднего маятника пересекает оптическую ось фотоэлектрического датчика 15, который выдает электрический сигнал на миллисекундомер. Цифровые индикаторы времени «ВРЕМЯ» и количества полных периодов колебаний маятника «ПЕРИОДЫ» расположены на лицевой панели блока управления и измерений 13.

На лицевой панели блока управления 13 размещены кнопки «СЕТЬ», «СБРОС» и «СТОП», тумблер «ВКЛ. ДВИГАТЕЛЯ», ручка потенциометра «ЧАСТОТА КОЛЕБАНИЙ», индикаторная лампочка:

«СЕТЬ» – включение / выключение питающего напряжения миллисекундомера. Кнопка имеет фиксацию.

«СБРОС» – обнуление индикаторов времени и числа колебаний, генерирование сигнала на начало измерений. Кнопка без фиксации.

«СТОП» – генерирование сигнала разрешения на окончание процесса счета. После нажатия этой кнопки счет прекращается не сразу, а только после того, как маятник завершит очередное колебание. Кнопка без фиксации.

Тумблер «ВКЛ. ДВИГАТЕЛЯ» позволяет подключить (отключить) питающее напряжение к схеме управления скоростью вращения электродвигателя. При этом на панели блока 13 засветится индикаторная лампочка.

Ручка «ЧАСТОТА КОЛЕБАНИЙ» – вращение этой ручки, связанной с потенциометром, позволяет изменять частоту вращения электродвигателя.

Порядок выполнения работы

Задание 1. Измерить период свободных синфазных колебаний

Подготовка установки к работе

Пункты 1–3 выполняются лаборантом или преподавателем.

1. Установите П-образную обойму, крепящую пружины 11 на стержнях 9, на расстоянии $b = 10$ см (или 15 см) от оси подвеса (на стержни нанесены риски с интервалом 5 см).

2. Установите на стержни грузы 10 массой $m = 200$ г (или 150 г) на расстоянии $l = 45$ см от оси подвеса. Расстояние l измеряется от оси подвеса до центра груза.

3. Включите установку в сеть напряжением 220 В.

4. Произведите регулировку положения платформы 1 при помощи винтов 2 так, чтобы концы стержней 9 в положении равновесия совпадали с нулевым делением шкалы 14.

5. Нажмите кнопку «СЕТЬ» на лицевой панели блока, при этом должны засветиться цифровые индикаторы и лампочка фотоэлектрического датчика 15.

Проведение измерений

1. Отклоните оба маятника в одну сторону на одинаковый угол $10...15^\circ$ от положения равновесия.

2. Нажмите кнопку «СБРОС» и одновременно отпустите маятники. Наблюдайте за тем, как маятники совершают колебательные движения и при этом секундомер производит отсчет времени и числа колебаний (периодов).

3. После совершения маятником определенного числа колебаний нажмите кнопку «СТОП». После того, как маятник *завершит очередное колебание*, счет прекратится, и на индикаторах зафиксируются показания времени t и числа колебаний n .

4. Освойтесь с работой установки, проведя несколько пробных измерений по пунктам 1–3 времени t и числа колебаний n .

5. Занесите характеристики b , l , m маятников в табл. 3.1 и 3.2.

6. Проведите серию из трех измерений по пунктам 1–3 времени t и числа колебаний n маятника. Показания индикаторов t и n занесите в табл. 3.1. Число колебаний маятника в одном измерении в этом и последующих опытах должно быть не менее 10.

Таблица 3.1

| l , м | № | n | t , с | $T_1 = \frac{t}{n}$, с | $\langle T_1 \rangle$, с | ω_1 , с ⁻¹ по ф-ле (3.10) | $T_{1теор} = \frac{2\pi}{\omega_1}$, с | E_1 , % |
|---------|---|-----|---------|-------------------------|---------------------------|--|---|-----------|
| | 1 | | | | | | | |
| | 2 | | | | | | | |
| | 3 | | | | | | | |

Задание 2. Измерить период свободных антифазных колебаний

1. Отклоните задний маятник на угол $10...15^\circ$, не отпуская его, нажмите кнопку «СБРОС». Далее отклоните передний маятник на такой же угол, но в другую сторону, затем одновременно отпустите оба маятника.

2. Проведите серию из трех измерений времени t и числа колебаний n маятника.

Таблица 3.2

| b , м | m , кг | k , Н/м | № | n | t , с | $T_2 = \frac{t}{n}$, с | $\langle T_2 \rangle$, с | ω_2 , с ⁻¹ по ф-ле (3.10) | $T_{2теор} = \frac{2\pi}{\omega_2}$, с | E_2 , % |
|---------|----------|-----------|---|-----|---------|-------------------------|---------------------------|--|---|-----------|
| | | 16,6 | 1 | | | | | | | |
| | | | 2 | | | | | | | |
| | | | 3 | | | | | | | |

Задание 3. Измерить период биений двух связанных маятников

Примечание: измерение числа (периодов) биений не может быть осуществлено с помощью индикатора «ПЕРИОДЫ» расположенного на лицевой панели установки, а определяется визуально, как число промежутков времени, через которые амплитуда колебаний переднего маятника обращается в нуль.

1. Освойтесь с работой установки.

Отклоните передний маятник на угол $10...15^\circ$ от положения равновесия и отпустите его.

Наблюдая за колебаниями маятников, обратите внимание, что при уменьшении амплитуды одного маятника амплитуда другого увеличивается. В то время, когда амплитуда одного из маятников будет максимальной, амплитуда другого станет равной нулю. То есть фазы биений двух маятников отличаются на $\pi/2$.

Наблюдая за колебаниями переднего маятника, обратите внимание, что его амплитуда обращается в нуль через равные промежутки времени – периоды биений τ .

Когда передний маятник приостановится около положения равновесия, включите секундомер нажатием кнопки «СБРОС». Отсчитав визуально $n = 5...7$ биений, нажмите кнопку «СТОП». На цифровом индикаторе «ВРЕМЯ» будет зафиксировано время t , за которое произойдет n биений. На цифровом индикаторе «ПЕРИОД» будет зафиксировано не число биений, а число колебаний маятника, совершенных за n биений.

2. Проведите серию из трех измерений времени t , за которое произойдет $5...7$ биений. Результаты измерений занесите в табл. 3.3.

Таблица 3.3

| № | Число биений n | t , с | $\tau = \frac{t}{n}$, с | $\langle \tau \rangle$, с | $\tau_{теор} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$, с | E_τ , % |
|---|------------------|---------|--------------------------|----------------------------|--|--------------|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |

Задание 4. Исследовать вынужденные колебания двух связанных маятников

Подготовка установки к работе

Пункты 1–3 выполняются лаборантом или преподавателем.

1. Установите характеристики маятников b , l и m такие же, как в задании 1.
2. Установите П-образную обойму, крепящую пружины 12 и сопрягаемую задний стержень 9 со стержнем 8 (см. рис. 3.4) на расстоянии 10...15 см ($\approx 1/4$ длины стержня) от оси подвеса.
3. Включите установку в сеть напряжением 220 В.
4. Произведите регулировку положения платформы 1 при помощи винтов 2 так, чтобы концы стержней 9 в положении равновесия совпадали с нулевым делением шкалы 14.

Проведение измерений

1. Включите тумблер «ВКЛ. ДВИГАТЕЛЯ», при этом на лицевой панели блока должна засветиться сигнальная лампочка.
2. Установите минимальную частоту вращения электродвигателя, плавно вращая ручку «ЧАСТОТА КОЛЕБАНИЙ».
3. Измерьте время t числа колебаний n переднего маятника. Измерьте амплитуду α_m колебаний переднего маятника, визуальнo фиксируя угол отклонения по шкале 14. Результаты измерений запишите в табл. 3.4.

Примечание: после изменения частоты вращения электродвигателя необходимо выждать примерно 1 минуту для того, чтобы колебания маятников стали установившимися, то есть частота колебаний Ω маятников совпала с частотой внешней силы.

Таблица 3.4

| № | n | t , с | $T = t/n$, с | $\Omega = 2\pi/T$, с ⁻¹ | α_m , ° |
|-----|-----|---------|---------------|-------------------------------------|----------------|
| 1 | | | | | |
| ... | | | | | |
| 10 | | | | | |

4. Проведите измерения времени t и амплитуды α_m колебаний при 10 различных значениях частоты вращения электродвигателя, последовательно изменяя частоту до максимального значения. Результаты измерений запишите в табл. 3.4.

Обработка результатов эксперимента

1. По данным табл. 3.1 рассчитайте экспериментальные значения T_1 и среднее значение $\langle T_1 \rangle$ периода синфазных колебаний связанных маятников. Результаты занесите в табл. 3.1.
2. Рассчитайте частоту ω_1 по формуле (3.10) и теоретическое значение периода $T_{1теор}$ синфазных колебаний. Результаты занесите в табл. 3.1.
3. Сравните значения $\langle T_1 \rangle$ и $T_{1теор}$, рассчитав относительную погрешность по формуле $E_1 = \frac{|T_{1теор} - \langle T_1 \rangle|}{T_{1теор}} 100\%$. Результат занесите в табл. 3.1.

4. По данным табл. 3.2 рассчитайте экспериментальные значения T_2 и среднее значение $\langle T_2 \rangle$ периода антифазных колебаний связанных маятников. Результаты занесите в табл. 3.2.

5. Рассчитайте частоту ω_2 по формуле (3.10) и теоретическое значение периода $T_{2теор}$ антифазных колебаний. Результаты занесите в табл. 3.2.

6. Сравните значения $\langle T_2 \rangle$ и $T_{2теор}$, рассчитав относительную погрешность по формуле $E_2 = \frac{|T_{2теор} - \langle T_2 \rangle|}{T_{2теор}} 100\%$. Результат занесите в табл. 3.2.

7. По данным табл. 3.3 рассчитайте экспериментальные значения τ и среднее значение $\langle \tau \rangle$ периода биений. Результаты занесите в табл. 3.3.

8. Рассчитайте теоретическое значение периода $\tau_{теор}$ биений по формуле (3.16) через значения собственных частот ω_1 и ω_2 (см. табл. 3.1 и 3.2). Запишите результат в табл. 3.3.

9. Сравните значения $\langle \tau \rangle$ и $\tau_{теор}$, рассчитав относительную погрешность по формуле $E_\tau = \frac{|\tau_{теор} - \langle \tau \rangle|}{\tau_{теор}} 100\%$. Результат занесите в табл. 3.3.

10. По данным табл. 3.4 постройте резонансную кривую.

11. По резонансной кривой определите резонансные частоты Ω_1 и Ω_2 , их значения запишите в табл. 3.5.

12. Сравните величины резонансных частот Ω_1 и Ω_2 со значениями соответствующих собственных частот ω_1 и ω_2 (см. табл. 3.1 и 3.2), рассчитав относительные погрешности. Результаты занесите в табл. 3.5.

Таблица 3.5

| ω_1, c^{-1} | Ω_1, c^{-1} | $E = \frac{ \omega_1 - \Omega_1 }{\omega_1} 100\%$ | ω_2, c^{-1} | Ω_2, c^{-1} | $E = \frac{ \omega_2 - \Omega_2 }{\omega_2} 100\%$ |
|---------------------------|---------------------------|--|---------------------------|---------------------------|--|
| | | | | | |

Результат работы

1. Запишите экспериментальные значения периода синфазных, антифазных колебаний и биений связанных маятников и погрешности результатов в виде

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \text{с}; & E_1 &= \% \\
 T_2 &= \text{с}; & E_2 &= \% \\
 \tau &= \text{с}; & E_\tau &= \%
 \end{aligned}$$

2. Запишите вывод о том, соответствует ли вид резонансной кривой теоретическому.

Контрольные вопросы

1. Какая колебательная система называется связанной?
2. Что такое степень свободы?
3. Какие степени свободы имеет система маятников в данной лабораторной работе?
4. Какие колебания называются собственными (свободными)? Какие колебания называются гармоническими?

5. Исходя из уравнения динамики вращательного движения, получите систему дифференциальных уравнений (3.6), описывающую малые колебания системы двух связанных маятников.

6. Какое движение совершает каждый маятник связанной системы? Почему движение каждого из двух связанных маятников не является гармоническими колебанием?

7. Какие колебания называются синфазными? Антифазными?

8. Какие колебания называются нормальными? Что называется нормальными частотами?

9. Какие колебания называются парциальными? Что называется парциальной частотой?

10. При каких начальных условиях возбуждаются синфазные, антифазные колебания?

11. Как при выполнении лабораторной работы экспериментально определяли периоды синфазных и антифазных колебаний?

12. Используя экспериментальные значения частот ω_2 и ω_1 , определите коэффициент жесткости пружины k .

13. Что называется биениями?

14. Зависит ли период биения от способа вывода маятниковой системы из положения равновесия?

15. Какая связь между маятниками называется слабой связью? Каковы условия применимости приближения слабой связи?

16. Как изменится период биений при увеличении расстояния b от оси подвеса до пружины, соединяющей маятники?

17. Как изменится период биений при увеличении массы m грузов, закрепленных на маятниках?

18. Как меняется со временем энергия (кинетическая, потенциальная) каждого из маятников при биениях? Выведите выражение для полной энергии системы.

19. С какой частотой происходит передача энергии от одного маятника к другому.

20. Как при выполнении лабораторной работы экспериментально определяли период биения?

21. Какие колебания называются вынужденными?

22. Что называется резонансом?

23. Каковы особенности вынужденных колебаний в связанной колебательной системе?

24. С чем связана возможность возникновения биений в процессе установления вынужденных колебаний (так называемый переходной процесс)?

25. Какой вид имеет резонансная кривая системы двух связанных маятников?

26. Сколько резонансных частот имеет связанная колебательная система с двумя степенями свободы?

27. Приведите примеры вредного проявления резонанса. Какими способами можно предотвратить резонанс?

28. Приведите примеры полезного использования явления резонанса.

Лабораторная работа № 4

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ОБОРОТНОГО МАЯТНИКА

Цель работы. Изучить основные закономерности свободных колебаний физического маятника, научиться определять характеристики оборотного маятника.

Приборы и принадлежности. Лабораторная установка «Оборотный маятник», секундомер.

Краткие теоретические сведения

Математическим маятником называется материальная точка, подвешенная на нерастяжимой, невесомой нити и совершающая колебания вертикальной плоскости под действием силы тяжести.

Физическим маятником называется твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через его центр тяжести (рис. 4.1).

И физический, и математический маятники относятся к классу *гравитационных маятников* и являются механическими колебательными системами с одной степенью свободы. Выберем в качестве координаты угол α отклонения маятника из положения равновесия.

Основной закон динамики вращательного для движения маятника, выведенного из положения равновесия и предоставленного самому себе, без учета сил трения имеет вид

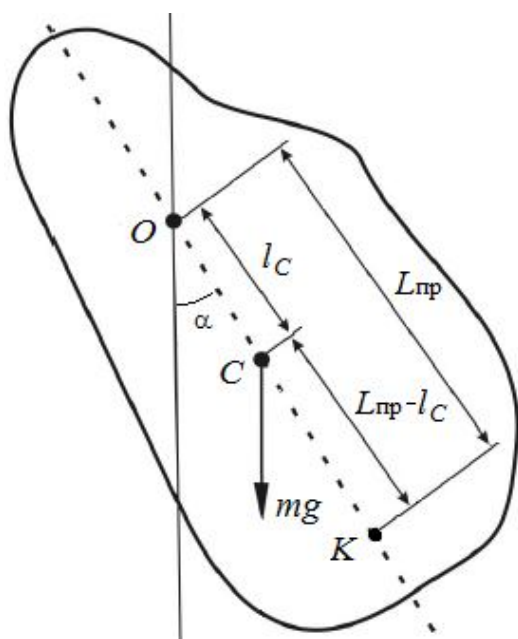


Рис. 4.1

$$J\varepsilon = M, \quad (4.1)$$

где J и M – момент инерции маятника и момент силы тяжести, приложенной к центру тяжести C маятника, относительно оси подвеса O ; ε – угловое ускорение маятника.

Для момента силы тяжести (рис. 4.1) справедливо выражение

$$M = -mgl_C \sin\alpha = -mgl_C \alpha, \quad (4.2)$$

где m – масса маятника; g – ускорение силы тяжести; l_C – расстояние от оси подвеса до центра тяжести маятника; α – угол отклонения маятника от положения равновесия, при малых углах отклонения $\sin\alpha \approx \alpha$. Знак минус означает, что момент силы тяжести противодействует увеличению угла α и является в данной системе *восстанавливающим* моментом силы.

Угловое ускорение есть вторая производная от угла по времени:

$$\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}. \quad (4.3)$$

Уравнение (4.1) с учетом выражений (4.2) и (4.3) после преобразований примет вид *дифференциального уравнения гармонических колебаний*:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgl_C}{J}\alpha = 0. \quad (4.4)$$

Решением дифференциального уравнения (4.4) является *кинематическое уравнение движения* вида

$$\alpha = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (4.5)$$

согласно которому маятник совершает незатухающие *гармонические колебания* с амплитудой A , начальной фазой φ_0 , циклической частотой ω и периодом колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl_C}} = 2\pi \sqrt{\frac{L_{\text{пр}}}{g}}, \quad (4.6)$$

где приведенная длина физического маятника

$$L_{\text{пр}} = \frac{J}{ml_C}. \quad (4.7)$$

Физическому маятнику можно поставить в соответствие эквивалентный (по периоду колебаний) математический маятник. Для математического маятника момент инерции $J = ml^2$, где l – длина нити математического маятника, и период колебаний определяется выражением

$$T_{\text{м}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (4.8)$$

Из сопоставления выражений (4.6) и (4.8) следует, что если $l = L_{\text{пр}}$ то $T_{\text{м}} = T$, поэтому для характеристики свойств физического маятника пользуются понятием приведенной длины $L_{\text{пр}}$. *Приведенная длина физического маятника* равна длине математического маятника, имеющего одинаковый с физическим маятником период колебаний.

Характерная точка K физического маятника, лежащая на расстоянии приведенной длины $L_{\text{пр}}$ от оси вращения, на прямой, проходящей через точку подвеса и центр тяжести, называется *центром колебания* (или *центром качания*) физического маятника (см. рис. 4.1). Центр колебания не совпадает с центром тяжести. Центр колебания K и точка подвеса O всегда расположены по разные стороны от центра тяжести C . Если точку подвеса физического маятника поместить в центр колебания, то его период не изменится, и точка подвеса станет центром колебания, то есть *точки подвеса и колебания обратимы*.

Покажем, что приведенная длина равна расстоянию между двумя точками – подвеса и колебания, подвешивание в которых приводит к совпадению периодов колебаний физического маятника.

Согласно теореме Гюйгенса – Штейнера момент инерции маятника относительно оси подвеса

$$J = J_C + ml_C^2, \quad (4.9)$$

где J_C – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через центр тяжести и параллельной оси подвеса.

Выражение для приведенной длины с учетом (4.9) перепишем в виде

$$L_{\text{пр}} = \frac{J}{ml_c} = \frac{J_c}{ml_c} + l_c, \quad (4.10)$$

откуда следует, что $L_{\text{пр}}$ всегда больше l_c .

Из уравнения (4.10) находим

$$l_c = \frac{J_c}{m(L_{\text{пр}} - l_c)}. \quad (4.11)$$

Приведенная длина перевернутого маятника $L'_{\text{пр}}$ равна (см. рис. 4.1):

$$L'_{\text{пр}} = \frac{J_c}{m(L_{\text{пр}} - l_c)} + (L_{\text{пр}} - l_c), \quad (4.12)$$

Воспользовавшись (4.11), из уравнения (4.12) получаем

$$L'_{\text{пр}} = l_c + (L_{\text{пр}} - l_c) = L_{\text{пр}}.$$

Данный результат свидетельствует, что приведенная длина не изменилась, период колебаний (см. формулу (4.6)) тоже не изменился. Это свойство обратимости используется в данной лабораторной работе для определения приведенной длины.

Определение положения центра тяжести и момента инерции физического маятника методом обращения

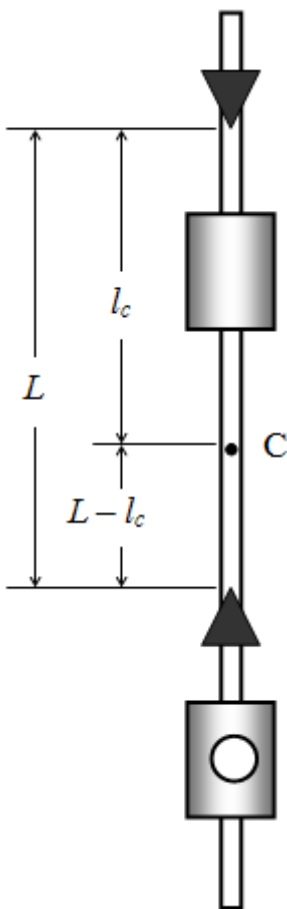


Рис. 4.2

Вычисление моментов инерции тел неправильной геометрической формы бывает достаточно сложным, поэтому моменты инерции таких тел определяют обычно опытным путем. Один из способов заключается в том, что исследуемую деталь подвешивают таким образом, чтобы она представляла собой физический маятник, и измеряют период ее колебаний.

Рассмотрим этот метод на примере *оборотного маятника*, который является частным случаем физического маятника (рис. 4.2). Маятник состоит из длинного стержня с грузами, на котором закреплены две опоры – треугольные призмы. В рабочем положении маятник подвешивается так, что он может совершать колебания относительно одной опоры или в перевернутом положении относительно другой опоры.

Рассмотрим общий случай, когда грузы находятся в произвольном положении, расстояние между опорами равно L , а расстояние от первой опоры до центра тяжести C равно l_c . Пусть период колебаний относительно первой опоры равен T_1 . Из формулы (4.6) выразим момент инерции маятника относительно первой опоры:

$$J_1 = \frac{T_1^2}{4\pi^2} mgl_c. \quad (4.13)$$

Если маятник перевернуть и возбудить колебания на второй опоре, то период колебаний T_2 изменится. Выразим момент инерции маятника относительно второй опоры:

$$J_2 = \frac{T_2^2}{4\pi^2} mg(L - l_C). \quad (4.14)$$

Согласно теореме Гюйгенса – Штейнера моменты инерции маятника относительно соответствующих опор

$$J_1 = J_C + ml_C^2, \quad (4.15)$$

$$J_2 = J_C + m(L - l_C)^2. \quad (4.16)$$

Вычитая из (4.14) выражение (4.13), получим:

$$J_2 - J_1 = \frac{mg}{4\pi^2} [T_2^2(L - l_C) - T_1^2 l_C]. \quad (4.17)$$

Вычитая из (4.16) выражение (4.15), получим:

$$J_2 - J_1 = m(L^2 - 2Ll_C). \quad (4.18)$$

Из результата вычитания формул (4.17) и (4.18) можно выразить расстояние l_C от центра тяжести до первой опоры:

$$l_C = L \frac{gT_2^2 - 4\pi^2 L}{g(T_2^2 + T_1^2) - 8\pi^2 L}. \quad (4.19)$$

Таким образом, чтобы вычислить расстояние l_C от центра тяжести до опоры маятника необходимо знать ускорение силы тяжести g , расстояние между опорами маятника L и периоды колебаний T_1 и T_2 маятника относительно обеих опор. Периоды колебаний можно рассчитать через экспериментально определенное время t_1 и t_2 , за которое маятник совершает n полных колебаний:

$$T = t/n. \quad (4.20)$$

Экспериментально определив расстояние l_C и зная массу маятника m , далее по формулам (4.13) и (4.14) можно вычислить моменты инерции J_1 и J_2 относительно двух осей подвеса.

Описание экспериментальной установки

Установка (рис. 4.3) включает в себя: основание 1, вертикальную стойку 2, математический и физический (оборотный) маятники, имеющие узлы подвеса на верхнем кронштейне 3, кронштейн 4 для установки фотодатчика, фотодатчик 5, блок управления и измерения 6.

Основание 1 оснащено регулируемыми ножками 7, которые позволяют произвести выравнивание прибора. Вертикальная стойка 2 выполнена из металлической трубы, к которой прикреплен миллиметровая шкала.

Оборотный маятник состоит из длинного металлического стержня 8, на котором жестко закреплены две опоры 9 и 10. По всей длине стержня нанесены риски с интервалом 1 см. Расстояние между опорами зафиксировано и равно $L = 36$ см. На стержень надеты два груза 11 и 12. Груз 11 жестко закреплен и находится между опорами. Груз 12 находится на конце стержня и может пере-

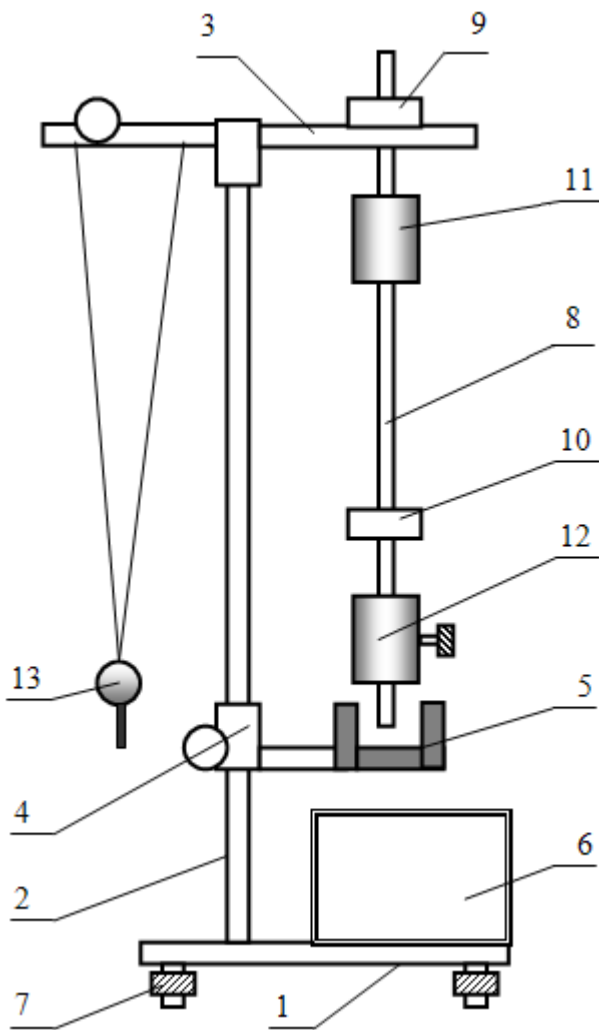


Рис. 4.3

мешаться вдоль стержня и закрепляется в нужном положении винтом. Перемещая подвижный груз по стержню, можно добиться такого его положения, при котором периоды колебаний маятника относительно обеих опор будут одинаковы. В этом случае расстояние между опорами маятника станет равным его приведенной длине ($L = L_{пр}$). В рабочем состоянии маятник установлен одной из опор на узел подвески кронштейна 3.

Математический маятник 13 имеет бифилярный подвес, выполненный из нити, на которой подвешен металлический шарик. Узлы подвески математического и физического маятников расположены на противоположных сторонах кронштейна 3. Кронштейн 4 имеет зажим для крепления на вертикальной стойке 2 и элементы фиксации фотодатчика 5.

Установка работает от блока управления и измерения 6. На лицевой панели блока управления размещены: цифровые индикаторы электронного миллисекундомера «ВРЕМЯ» и количества полных периодов колебаний маятника «ПЕРИОДЫ»; кнопки «СЕТЬ», «СБРОС» и «СТОП»:

«СЕТЬ» – включение / выключение питающего напряжения миллисекундомера. Кнопка имеет фиксацию.

«СБРОС» – обнуление индикаторов времени и числа колебаний, генерирование сигнала на начало измерений. Кнопка без фиксации.

«СТОП» – генерирование сигнала разрешения на окончание процесса счета. После нажатия этой кнопки счет прекращается не сразу, а только после того, как маятник завершит очередное колебание. Кнопка без фиксации.

Порядок выполнения измерений

Подготовка установки к работе

Включите установку в сеть напряжением 220 В (**выполняется лаборантом или преподавателем**).

Произведите регулировку горизонтального положения платформы 1 при помощи винтов 7.

Нажмите клавишу «СЕТЬ». Должны засветиться лампочка фотоэлектрического датчика и индикаторы секундомера.

Проведение измерений

1. Установите и закрепите винтом подвижный груз на расстоянии $N = 2$ см от конца стержня оборотного маятника.

2. Установите маятник первой опорой на узел подвески кронштейна (подвижным грузом вниз).

3. Установите и закрепите винтом фотодатчик на такой высоте, чтобы конец стержня маятника при колебаниях пересекал оптическую ось фотоэлемента.

4. Отклоните маятник на угол $10...12^\circ$ от положения равновесия.

5. Нажмите кнопку «СБРОС» и отпустите маятник. Наблюдайте за тем, как маятник совершает колебательные движения и при этом миллисекундомер производит отсчет времени и числа колебаний (периодов).

6. После совершения маятником определенного числа колебаний нажмите кнопку «СТОП». После того, как маятник *завершит очередное колебание*, счет прекратится, и на индикаторах зафиксируются показания времени t и числа колебаний n .

7. Освойтесь с работой установки, проведя несколько пробных измерений по пунктам 4–6 времени t и числа колебаний n маятника.

8. Отклоните маятник на угол $10...12^\circ$ от положения равновесия.

9. Измерьте время t_1 , за которое маятник совершает $n = 10$ полных колебаний. Показания цифровых индикаторов t_1 и n занесите в табл. 4.1.

10. Повторите измерения по пунктам 8 и 9, устанавливая подвижный груз последовательно в положения $N = 3, 4, 5, 6... \text{ см}$. Значения N и соответствующие показания цифровых индикаторов t_1 и n занесите в табл. 4.1.

11. Переверните маятник и подвесьте его к кронштейну на второй опоре.

12. Установите и закрепите винтом фотодатчик на такой высоте, чтобы конец стержня маятника при колебаниях пересекал оптическую ось фотоэлемента.

13. Измерьте время t_2 , за которое маятник совершает $n = 10$ полных колебаний, устанавливая подвижный груз последовательно в положения $N = 2, 3, 4, 5, 6... \text{ см}$. Значения N и соответствующие показания цифровых индикаторов t_2 и n занесите в табл. 4.1.

Таблица 4.1

| $m, \text{ кг}$ | n | 10 | | | | | | | | | |
|-----------------|------------------|----|---|---|---|---|---|---|---------|---------------------|--|
| 0,580 | $N, \text{ см}$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | $N_p =$ | $l = 36 \text{ см}$ | |
| | $t_1, \text{ с}$ | | | | | | | | | $t_m = \text{ с}$ | |
| | $t_2, \text{ с}$ | | | | | | | | | | |

14. По данным табл. 4.1 постройте на одних координатных осях графики зависимостей t_1 и t_2 от N .

15. По точке пересечения графиков определите положение подвижного груза N_p , при котором периоды колебаний маятника одинаковы относительно обеих опор. Запишите значение N_p в табл. 4.1.

16. Установите подвижный груз в положение N_p и для этого положения груза измерьте время t_1 и t_2 для $n = 10$ полных колебаний относительно двух опор соответственно. Результат занесите в табл. 4.1.

17. Снимите физический маятник с верхнего кронштейна.

18. Поверните и закрепите верхний кронштейн таким образом, чтобы шарик математического маятника оказался в рабочей зоне фотодатчика.

19. По линейке на вертикальной стойке установите длину математического маятника, равную расстоянию между опорами физического маятника: $l = 36$ см.

20. Установите и закрепите винтом фотодатчик на такой высоте, чтобы стерженёк внизу шарика при колебаниях пересекал оптическую ось фотоэлемента.

21. Отклоните шарик маятника в любую сторону на угол $10 \dots 12^\circ$ от положения равновесия.

22. Измерьте время t_m , за которое маятник совершает $n = 10$ полных колебаний. Длину нити математического маятника l и соответствующие показания цифровых индикаторов t_m и n занесите в табл. 4.1.

Обработка результатов эксперимента

1. Для положения груза N_p по данным табл. 4.1 по формуле (4.20) рассчитайте периоды колебаний маятника T_1 и T_2 относительно двух опор и найдите их среднее значение:

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2}.$$

2. Для положения груза N_p рассчитайте приведенную длину $L_{пр}$ физического маятника, выразив ее из формулы (4.8):

$$L_{пр} = \frac{gT^2}{4\pi^2},$$

используя среднее значение периода T и приняв $g = 9,81$ м/с².

3. Сравните экспериментально определенное значение приведенной длины $L_{пр}$ с расстоянием между опорными призмами L , рассчитав относительную погрешность:

$$E_L = \frac{|L - L_{пр}|}{L} 100 \%.$$

4. Рассчитайте по данным табл. 4.1 по формуле (4.20) период колебаний математического маятника T_m .

5. Сравните период колебаний T физического маятника с периодом колебаний соответствующего математического маятника, рассчитав относительную погрешность:

$$E_T = \frac{|T - T_m|}{T} 100 \%.$$

6. Для произвольного положения на стержне подвижного груза ($N \neq N_p$) рассчитайте:

периоды колебаний маятника T_1 и T_2 относительно двух опор по формуле (4.20);

расстояние l_C от первой опоры до центра тяжести маятника по формуле (4.19);

моменты инерции маятника J_1 и J_2 относительно двух осей подвеса по формулам (4.13) и (4.14).

Результат работы

1. Запишите экспериментальное значение приведенной длины маятника и погрешность результата в виде

$$L_{\text{пр}} = \quad \text{м}; \quad E_L = \quad \%$$

2. Запишите экспериментальные значения периодов колебаний физического маятника и соответствующего математического маятника и погрешность в виде

$$T = \quad \text{с}; \quad T_{\text{м}} = \quad \text{с}; \quad E_T = \quad \%$$

3. Запишите моменты инерции маятника относительно двух осей подвеса

$$J_1 = \quad \text{кг}\cdot\text{м}^2; \quad J_2 = \quad \text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

4. Сделайте выводы по работе.

Контрольные вопросы

1. Какие колебания называются гармоническими?
2. Что называется амплитудой, фазой, циклической частотой, периодом колебаний?
3. Какой маятник называется математическим, физическим?
4. Что представляет собой оборотный маятник?
5. Напишите дифференциальное уравнение гармонических колебаний в общем виде.
6. Выведите уравнение колебаний физического маятника (4.4).
7. Как рассчитывается период колебаний математического маятника?
8. Как рассчитывается период колебаний физического маятника?
9. Зависит ли период колебания математического маятника от его массы?
10. Зависит ли период колебания физического маятника от его массы?
11. Почему формулами (4.6) и (4.8) можно пользоваться только в том случае, когда амплитуды колебаний маятников малы?
12. Что называется центром тяжести, точкой подвеса, центром колебаний?
13. В чем заключается свойство обратимости физического маятника?
14. Как экспериментально в данной работе определяется приведенная длина физического маятника?
15. Объясните физический смысл приведенной длины физического маятника.
16. Объясните, какую роль играет перемещение подвижной чечевицы в поисках периода колебаний оборотного маятника.
17. Найдите приведенную длину и период колебаний физического маятника, представляющего собой однородный стержень длиной l и массой m , подвешенный за один из своих концов.

Лабораторная работа № 5

ИЗУЧЕНИЕ ЗАТУХАЮЩИХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Цель работы. Изучить основные закономерности свободных затухающих колебаний, вынужденных колебаний и явления резонанса.

Приборы и принадлежности. Лабораторная установка «Маятник с одной степенью свободы», набор грузов, секундомер.

Краткие теоретические сведения

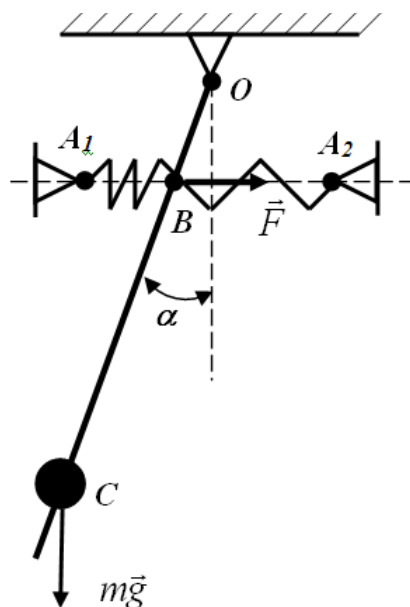


Рис. 5.1

Изучение основных закономерностей колебательного движения механической системы с одной степенью свободы будем проводить на примере колебаний маятника, принципиальная схема которого показана на рис. 5.1. Маятник представляет собой тонкий длинный однородный стержень, шарнирно закрепленный в точке O . На другом конце стержня закреплен груз, масса m которого значительно больше массы стержня. Расстояние от точки подвеса маятника O до центра масс груза C равно l ($OC = l$). К стержню в точке B (расстояние $OB = b$) прикреплены две одинаковые цилиндрические пружины, общий коэффициент жесткости которых равен k . Противоположные концы пружин закреплены в точках A_1 и A_2 . В равновесном состоянии маятника $A_1B = BA_2$ и пружины не деформированы. Если вывести систему из состояния равновесия, отклонив стержень на угол α , а затем отпустить его, то маятник будет совершать колебания в вертикальной плоскости относительно горизонтальной оси, проходящей через точку подвеса O . Состояние такой системы полностью определяется одной координатой – углом α отклонения маятника от положения равновесия, то есть система имеет одну степень свободы.

Состояние такой системы полностью определяется одной координатой – углом α отклонения маятника от положения равновесия, то есть система имеет одну степень свободы.

Собственные незатухающие колебания консервативной системы

Основной закон динамики для движения маятника, выведенного из положения равновесия и предоставленного самому себе, имеет вид

$$J\varepsilon = \sum M, \quad (5.1)$$

где J – момент инерции маятника относительно оси подвеса; ε – угловое ускорение маятника; $\sum M$ – сумма моментов сил, действующих на маятник, относительно оси подвеса.

Поскольку масса стержня значительно меньше массы груза, а его длина значительно больше размеров груза, то момент инерции маятника относительно оси подвеса можно считать равным

$$J = ml^2. \quad (5.2)$$

Угловое ускорение есть вторая производная от угла по времени

$$\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}. \quad (5.3)$$

Если пренебречь силами сопротивления движению, то на маятник будут действовать (см. рис. 5.1) два момента *консервативных* сил – силы тяжести $m\vec{g}$ и силы упругости \vec{F} . Следовательно сумма моментов сил, действующих на маятник, относительно оси подвеса

$$\sum M = -mgl \sin \alpha - kb \sin \alpha \cdot b \cos \alpha, \quad (5.4)$$

где $l \sin \alpha$ – плечо силы тяжести; $b \sin \alpha$ – изменение длины пружин (растяжение одной и сжатие другой пружины); $b \cos \alpha$ – плечо силы упругости.

С учетом того, что при малых углах отклонения $\sin \alpha \approx \alpha$ и $\cos \alpha \approx 1$, выражение (5.4) можно переписать в виде

$$\sum M = -(mgl + kb^2)\alpha, \quad (5.5)$$

то есть при малых углах отклонения маятника от положения равновесия на нее действует *восстанавливающий момент*, пропорциональный углу отклонения α .

Уравнение движения (5.1) маятника с учетом выражений (5.2), (5.3) и (5.5) примет вид дифференциального уравнения второго порядка:

$$ml^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -(mgl + kb^2)\alpha. \quad (5.6)$$

Уравнение (5.6) приводится к стандартному виду линейного однородного дифференциального уравнения гармонических колебаний

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \left(\frac{g}{l} + \frac{kb^2}{ml^2} \right) \alpha = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \alpha = 0 \quad (5.7)$$

с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{kb^2}{ml^2}} \quad (5.8)$$

и периодом колебаний

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{kb^2}{ml^2}}}. \quad (5.9)$$

Циклическая частота и период таких колебаний зависят от параметров, определяющих жесткость и инертность колеблющейся системы и не зависят от начальных условий. Они являются важнейшими характеристиками колебательной системы.

Общим решением дифференциального уравнения (5.7) является кинематическое уравнение свободных незатухающих колебаний (или закон колебаний) в виде зависимости угла поворота от времени:

$$\alpha = \alpha_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (5.10)$$

где α_m – амплитуда колебаний, φ_0 – начальная фаза колебаний, определяемые из начальных условий и не зависящие от параметров системы. Колебания описываются функцией \cos , то есть являются гармоническими.

Собственные затухающие колебания диссипативной системы

Все реальные колебательные механические системы являются *диссипативными*, т.е. полная энергия такой системы постепенно расходуется на совершение работы против сил сопротивления, поэтому реальные колебания не могут продолжаться бесконечно долго. Допустим, что на маятник кроме восстанавливающего момента силы (5.5) действует *момент сил сопротивления (вязкого трения)*, пропорциональный первой производной от угла по времени, то есть *угловой скорости*

$$M_c = -r \frac{d\alpha}{dt}, \quad (5.11)$$

где r – коэффициент сопротивления.

Уравнение движения (5.1) маятника с учетом (5.5) и (5.11) примет вид дифференциального уравнения

$$ml^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -(mgl + kb^2)\alpha - r \frac{d\alpha}{dt}, \quad (5.12)$$

которое приводится к стандартному виду линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \left(\frac{r}{ml^2}\right) \frac{d\alpha}{dt} + \left(\frac{g}{l} + \frac{kb^2}{ml^2}\right) \alpha = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\beta \frac{d\alpha}{dt} + \omega_0^2 \alpha = 0. \quad (5.13)$$

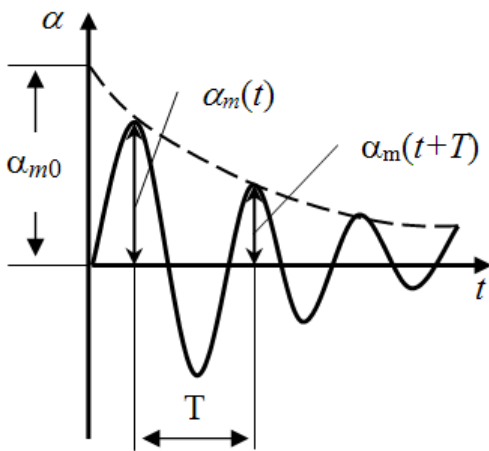


Рис. 5.2

При небольшом сопротивлении общим решением дифференциального уравнения (5.13) является зависимость угла поворота от времени

$$\alpha = \alpha_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (5.14)$$

которая называется *уравнением затухающих колебаний*. График затухающих колебаний представлен на рис. 5.2.

Движение, описываемое уравнением (5.14), строго говоря, является *негармоническим и непериодическим*, так как с течением времени последовательные максимальные отклонения точки от положения равновесия уменьшаются. Однако при несильном затухании зависимость (5.14) можно рассматривать как уравнение гармонических колебаний с *амплитудой затухающих колебаний*, которая уменьшается с течением времени по экспоненциальному закону (пунктирная кривая на рис. 5.2)

$$\alpha_m = \alpha_{m0} e^{-\beta t}, \quad (5.15)$$

где α_{m0} – амплитуда колебаний в начальный момент времени $t = 0$; $\beta = \frac{r}{2ml^2}$ – коэффициент затухания.

Период затухающих колебаний T условно определяют как промежуток времени между двумя последующими максимумами колеблющейся величины α (рис. 5.2).

Начальная амплитуда α_{m0} и начальная фаза колебаний φ_0 зависят от начальных условий.

Частота затухающих колебаний ω зависит от собственной частоты ω_0 и коэффициента затухания β и равна

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{kb^2}{ml^2} - \left(\frac{r}{2ml^2}\right)^2}, \quad (5.16)$$

то есть частота затухающих колебаний всегда меньше собственной частоты системы ($\omega < \omega_0$).

Для оценки быстроты затухания колебаний применяют *логарифмический декремент затухания* λ , определяемый как натуральный логарифм отношения амплитуд, соответствующих моментам времени, отличающимся на период T (см. рис. 5.2)

$$\lambda = \ln \frac{\alpha_m(t)}{\alpha_m(t+T)}. \quad (5.17)$$

Связь между логарифмическим декрементом затухания и коэффициентом затухания устанавливается формулой

$$\lambda = \beta T. \quad (5.18)$$

Для характеристики затухания колебательной системы часто применяется величина Q , называемая добротностью, которая определяет относительную убыль энергии за период, подобно тому, как декремент затухания определяет относительную убыль амплитуды за период. *Добротность* обратно пропорциональна декременту затухания:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}. \quad (5.19)$$

С учетом формулы (5.17) закон убывания амплитуды (5.15) в зависимости от числа колебаний n можно представить в виде

$$\alpha_m = \alpha_{m0} e^{-\lambda n}. \quad (5.20)$$

Формула (5.20) в дальнейшем используется для экспериментального нахождения логарифмического декремента затухания λ .

Вынужденные колебания

Вынужденные колебания маятника возникают в результате действия внешнего периодически изменяющегося момента силы.

Пусть на маятник кроме восстанавливающего момента силы (5.5) и момента сил сопротивления (5.11) действует внешний *вынуждающий момент* силы, изменяющийся по гармоническому закону

$$M_B = M_0 \cos \Omega t, \quad (5.21)$$

где M_0 – амплитуда вынуждающего момента; Ω – частота вынуждающего момента.

Уравнение движения (5.1) маятника с учетом (5.5), (5.11) и (5.21) примет вид дифференциального уравнения

$$ml^2 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -(mgl + kb^2) \alpha - r \frac{d\alpha}{dt} + M_0 \cos \Omega t, \quad (5.22)$$

которое приводится к стандартному виду линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \left(\frac{r}{ml^2}\right)\frac{d\alpha}{dt} + \left(\frac{g}{l} + \frac{kb^2}{ml^2}\right)\alpha = \frac{M_0}{ml^2} \cos\Omega t \quad \text{или} \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\beta\frac{d\alpha}{dt} + \omega_0^2\alpha = \frac{M_0}{ml^2} \cos\Omega t. \quad (5.23)$$

Решением дифференциального уравнения (5.23) для установившегося режима является *уравнение вынужденных колебаний*:

$$\alpha = \alpha_m \cos(\Omega t - \psi), \quad (5.24)$$

где α_m и Ω – амплитуда и частота колебаний; ψ – сдвиг фаз между вынуждающим моментом и вызываемыми им колебаниями.

Из уравнения (5.24) следует, что при гармоническом возбуждении установившиеся вынужденные колебания представляют собой незатухающие гармонические колебания, причем **частота вынужденных колебаний равна частоте Ω вынуждающего момента**.

Амплитуда вынужденных колебаний определяется как свойствами силы, так и параметрами системы:

$$\alpha_m = \frac{M_0}{J\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} = \frac{M_0}{ml^2\sqrt{\left(\frac{g}{l} + \frac{kb^2}{ml^2} - \Omega^2\right)^2 + \left(\frac{r}{ml^2}\right)^2\Omega^2}}. \quad (5.25)$$

Сдвиг фаз ψ определяется уравнением

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{r\Omega}{mgl + kb^2 - ml^2\Omega^2}, \quad (5.26)$$

из которого следует, что вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающего момента, и величина отставания лежит в пределах: $0 < \psi < \pi$.

Из формулы (5.25) следует, что при стремлении частоты Ω вынуждающего момента к собственной частоте ω_0 маятника происходит резкое возрастание амплитуды колебаний. Это явление носит название *резонанса*. При частоте вынуждающего момента

$$\Omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{kb^2}{ml^2} - 2\left(\frac{r}{2ml^2}\right)^2} \quad (5.27)$$

амплитуда вынужденных колебаний достигает максимального значения. Эта частота Ω_p называется *резонансной частотой*.

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающего момента силы (или, что то же самое, от частоты вынужденных колебаний) называется амплитудно-частотной характеристикой системы. На рис. 5.3 приведены графики зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающего момента, получившие название *резонансных кривых*. При вынужденных колебаниях *добротность* (5.19) является важнейшей характеристикой резонансных свойств системы. Она показывает, во сколько раз амплитуда колебаний при резонансе α_p (рис. 5.3) превышает статическое смещение сис-

темы от положения равновесия α_0 при действии постоянного момента M_0 , когда частота $\Omega = 0$:

$$Q = \frac{\alpha_P}{\alpha_0}. \quad (5.28)$$

При уменьшении коэффициента затухания, следовательно при увеличении добротности колебательной системы ($\beta_2 < \beta_1$; $Q_2 > Q_1$), резонанс проявляется более отчетливо и с большей амплитудой.

При углах отклонения маятника больше $10\text{--}12^\circ$ заметно проявляется нелинейность, то есть непропорциональность восстанавливающего момента силы углу отклонения α . В этом случае резонансная частота зависит от амплитуды и вид резонансной кривой искажается. Для исследуемого маятника силовая характеристика является мягкой, так как кривая зависимости M от α имеет отрицательную кривизну (см. уравнение (5.4)).

В нелинейных системах с мягкой характеристикой восстанавливающей силы и вязким сопротивлением резонансная кривая примет вид, показанный на рис. 5.4. Область между вертикальными стрелками соответствует неоднозначной амплитудно-частотной зависимости. При увеличении частоты происходит «срыв колебаний» на частоте Ω_2 , т.е. резкое увеличение амплитуды. При уменьшении частоты наблюдается «срыв колебаний» на частоте Ω_1 – резкое уменьшение амплитуды.

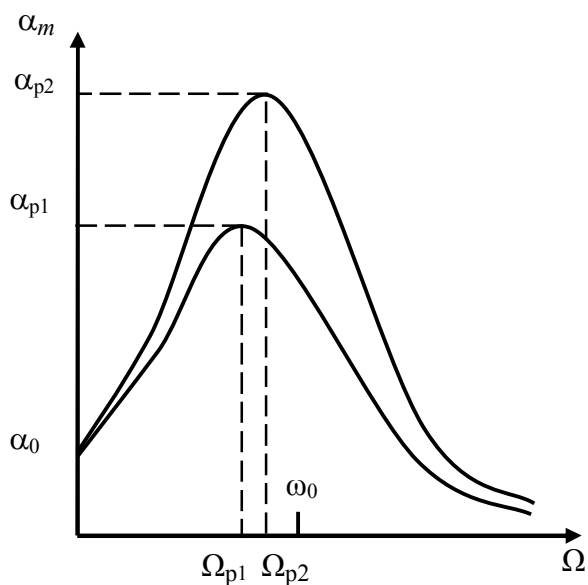


Рис. 5.3

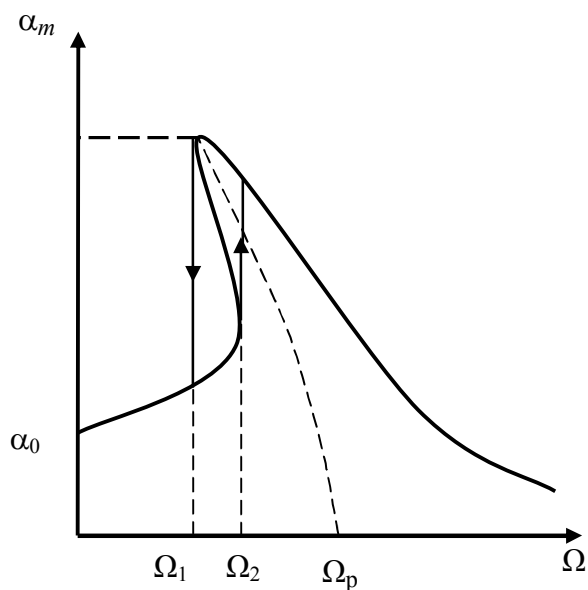


Рис. 5.4

Описание экспериментальной установки

Общий вид установки «Маятник с одной степенью свободы» для изучения затухающих и вынужденных колебаний представлен на рис. 5.5. Платформа 1 оснащена регулировочными винтами 2, позволяющими устанавливать ее в горизонтальное положение.

С платформой соединена колонка 3, на которой закреплены кронштейны 4 и 5. На стержне 6 верхнего кронштейна находятся подвесы 7, на которых с помощью шариковых подшипников подвешены стержень 8 и маятник, состоя-

ший из стержня 9 и перемещаемого груза 10. На стержень маятника 9 нанесены риски с интервалом 5 см. Маятник сопряжен со стержнем 8 при помощи двух пружин 11, закрепленных в специальной П-образной обойме. Стержень 8 с помощью кулисного механизма сопряжен с приводным диском 12, закрепленным на валу электродвигателя. Электродвигатель находится в блоке управления 13. К кронштейну 4 прикреплена угловая шкала 14, позволяющая определять амплитуду колебаний маятников.

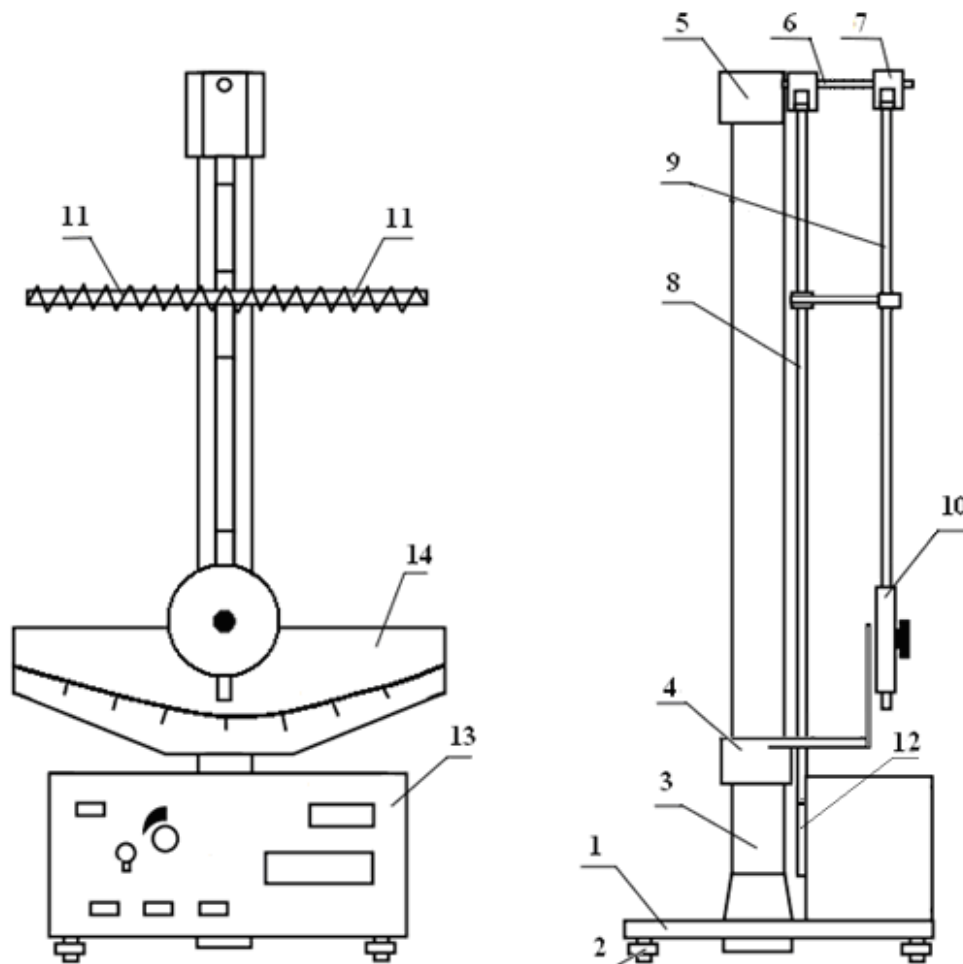


Рис. 5.5

Возбуждение колебаний маятниковой системы производится следующим образом. При вращении диска стержень 8 приходит в колебательное движение и через П-образную обойму задает синхронные колебания точкам крепления пружин A_1 и A_2 (см. рис. 5.1). Пружины 11, в свою очередь, передают вынуждающий момент маятнику, вовлекая его в колебательный процесс. Такой способ внешнего воздействия на колебательную систему называется кинематическим возбуждением.

На лицевой панели блока управления 13 размещены:

Тумблер «ВКЛ. ДВИГАТЕЛЯ», который позволяет подключить (отключить) питающее напряжение к схеме управления электродвигателем. При этом на панели засветится индикаторная лампочка.

Ручка «ЧАСТОТА КОЛЕБАНИЙ» связанная с потенциометром. Вращение этой ручки позволяет изменять частоту вращения электродвигателя.

Размещенные на лицевой панели кнопки «СЕТЬ», «СБРОС» и «СТОП» в данной лабораторной работе не задействованы.

Порядок выполнения работы

Задание 1. Исследование периода свободных колебаний

1. Установите П-образную обойму, крепящую пружины 11 на стержнях, на расстоянии $b = 10$ см от оси подвеса (на стержни нанесены риски с интервалом 5 см) (*выполняется лаборантом или преподавателем*).

2. Установите на стержень 9 груз 10 массой $m = 100 \dots 200$ г на расстоянии $l = 45$ см от оси подвеса. Расстояние l измеряется от оси подвеса до центра груза (*выполняется лаборантом или преподавателем*).

3. Произведите регулировку положения платформы 1 при помощи винтов 2 так, чтобы конец стержня 9 в положении равновесия совпадал с нулевым делением шкалы 14.

4. Отклоните маятник в любую сторону на угол $10 \dots 12^\circ$ от положения равновесия.

5. Отпустите маятник и одновременно включите секундомер. Измерьте и запишите в табл. 5.1 время t , за которое маятник совершает $n = 10$ полных колебаний.

6. Повторите опыт (пункты 4 и 5) еще два раза. Начальные отклонения маятника от положения равновесия во всех измерениях брать одинаковые.

7. Переместите груз 10 на расстояние $l = 40$ см от оси подвеса и выполните измерения по пунктам 4, 5 и 6.

8. Аналогичные измерения проведите для положений груза $l = 35, 30, 25, 20$ см.

Таблица 5.1

| b , см | m , г | k , Н/м | l , см | n | t_1 , с | t_2 , с | t_3 , с | $\langle t \rangle$, с | $T = \frac{\langle t \rangle}{n}$, с | ω_0 , с ⁻¹ | T_0 , с | E , % | |
|----------|---------|-----------|----------|-----|-----------|-----------|-----------|-------------------------|---------------------------------------|------------------------------|-----------|---------|--|
| 10 | | 16,6 | 45 | 10 | | | | | | | | | |
| | | | 40 | 10 | | | | | | | | | |
| | | | 35 | 10 | | | | | | | | | |
| | | | 30 | 10 | | | | | | | | | |
| | | | 25 | 10 | | | | | | | | | |
| | | | 20 | 10 | | | | | | | | | |

Задание 2. Исследование характеристик затухающих колебаний

1. Переместите груз 10 на стержне 9 на расстояние $l = 45$ см от оси подвеса. Расстояние l измеряется от оси подвеса до центра груза.

2. Отклоните маятник в любую сторону на угол $10 \dots 12^\circ$ от положения равновесия и отпустите его.

3. Измерьте по шкале 14 и занесите в табл. 5.2 амплитуды α_m (максимальные углы отклонения) для 5, 10, 15, 20, 25 и 30-го колебаний.

4. Повторить опыт (пункты 2 и 3) еще два раза. Начальные отклонения маятника от положения равновесия во всех измерениях брать одинаковые.

Таблица 5.2

| Число колебаний n | Амплитуда, α_m , ° | | | | $\ln\alpha_m$ |
|---------------------|---------------------------|----------|----------|------------------|---------------|
| | 1-й опыт | 2-й опыт | 3-й опыт | Среднее значение | |
| 0 | | | | | |
| 5 | | | | | |
| 10 | | | | | |
| 15 | | | | | |
| 20 | | | | | |
| 25 | | | | | |
| 30 | | | | | |

Задание 3. Исследование вынужденных колебаний

1. Получив разрешение преподавателя или лаборанта, включите установку в сеть напряжением 220 В.

2. Включите тумблер «ВКЛ. ДВИГАТЕЛЯ», при этом на лицевой панели блока должна засветиться сигнальная лампочка.

3. Плавно вращая ручку «ЧАСТОТА КОЛЕБАНИЙ» установите минимально возможную частоту вращения электродвигателя.

4. Увеличивая с небольшими интервалами частоту вращения электродвигателя, найдите *приблизительно* положение ручки «ЧАСТОТА КОЛЕБАНИЙ», при котором амплитуда колебаний маятника достигает наибольшей величины, то есть наблюдается резонанс. Это положение примерно поделит весь диапазон измерений на две части: *дорезонансную область низких частот* и *послерезонансную область высоких частот*. Убедитесь, что при дальнейшем увеличении частоты в области высоких частот амплитуда колебаний маятника убывает.

Примечание: *каждый раз после изменения частоты вращения электродвигателя необходимо выждать примерно 1 минуту для того, чтобы завершился переходный режим и колебания маятников стали установившимися, то есть частота колебаний Ω маятников совпала с частотой внешней силы.*

5. Установите такую минимальную частоту вращения электродвигателя, чтобы маятник совершал установившиеся колебания с небольшой амплитудой. По секундомеру измерьте время t , за которое маятник совершит $n = 10$ колебаний. Измерьте амплитуду α_m колебаний маятника при заданной частоте, визуально фиксируя угол отклонения по шкале 14. Результаты измерений запишите в табл. 5.3.

Примечание: *в результате нестрогой гармоничности вынуждающей силы и нелинейности самого маятника вблизи резонанса и при малом затухании наблюдаются явления, похожие на биения. При этом на заданной частоте амплитуда не постоянна, а плавно нарастает, затем плавно убывает, опять нарастает и т.д. В этом случае за амплитуду установившегося колебания рекомендуется принять максимальное из наблюдаемых значений амплитуды.*

6. Проведите измерения времени t и амплитуды α_m колебаний при 10 различных значениях частоты вращения электродвигателя (примерно поровну в области низких и области высоких частот), последовательно увеличивая частоту. Результаты измерений запишите в табл. 5.3.

ВНИМАНИЕ. Если отклонения маятника при резонансе превысят 30° , то во избежание разрушения установки остановите маятник, запишите в таблицу $\alpha_m = 30^\circ$, и продолжайте измерения на следующей частоте.

Таблица 5.3

| № | n | $t, \text{с}$ | $T = \frac{t}{n}, \text{с}$ | $\Omega = \frac{2\pi}{T}, \text{с}^{-1}$ | $\alpha_m, ^\circ$ |
|-----|-----|---------------|-----------------------------|--|--------------------|
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| ... | | | | | |
| 10 | | | | | |

Обработка результатов эксперимента

1. По данным табл. 5.1 рассчитайте для каждого опыта средние значения $\langle t \rangle$ и экспериментальное значение периодов колебаний маятника T . Результаты занесите в табл. 5.1.

2. Рассчитайте для каждого положения груза l теоретические значения собственной частоты ω_0 и периода T_0 колебаний по формулам (5.8) и (5.9) соответственно. Результаты занесите в табл. 5.1.

3. Сравните экспериментальные значения периода T колебаний реальной системы и теоретические значения периода T_0 собственных колебаний идеализированной динамической модели, рассчитав относительную погрешность по формуле $E = \frac{|T_0 - T|}{T_0} 100\%$. Результат занесите в табл. 5.1.

4. Для наглядного сравнения по данным табл. 5.1 постройте на одних координатных осях два графика: график экспериментальной зависимости T от l и график теоретической зависимости T_0 от l .

5. По данным табл. 5.2 по результатам трех опытов рассчитайте средние значения амплитуд колебаний α_m и их натуральные логарифмы. Результаты занесите в табл. 5.2.

6. Постройте по данным табл. 5.2 график зависимости $\ln \alpha_m$ от числа колебаний n и определите логарифмический декремент затухания следующим образом.

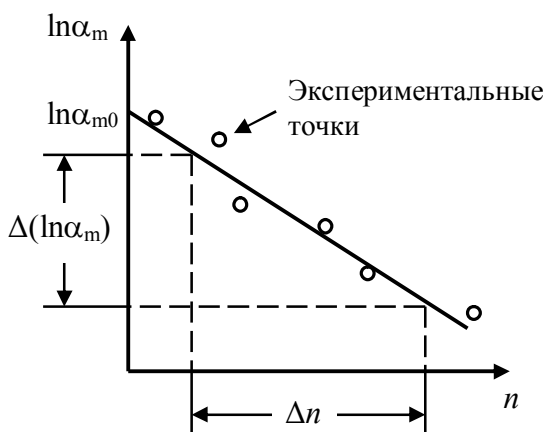


Рис. 5.5

Так как амплитуда затухающих колебаний изменяется по закону (5.20), то после логарифмирования этого выражения получим

$$\ln \alpha_m = \ln \alpha_{m0} - \lambda n.$$

Графически эта зависимость выражается прямой, отсекающей на оси ординат отрезок, равный $\ln \alpha_{m0}$ (рис. 5.5). Логарифмический декремент затухания определяется по графику как угловой коэффициент

$$\lambda = \frac{\Delta(\ln \alpha_m)}{\Delta n}.$$

Запишите значение логарифмического декремента затухания, определенное из графика, в табл. 5.4.

7. Рассчитайте значения характеристик для написания уравнения затухающих колебаний маятника при $l = 45$ см:

период T и частоту затухающих колебаний ω маятника;

коэффициент затухания β по формуле (5.18);

начальную фазу колебаний φ_0 , подставив начальные условия: $t = 0$, $\alpha = \alpha_{m0}$ в уравнение затухающих колебаний (5.14).

Результаты занесите в табл. 5.4.

Таблица 5.4

| T , с (из табл. 5.1) | $\omega = \frac{2\pi}{T}$, с ⁻¹ | λ | β , с ⁻¹ | α_{m0} | φ_0 |
|---------------------------|---|-----------|---------------------------|---------------|-------------|
| | | | | | |

8. По данным табл. 5.3 для каждого из опытов рассчитайте период T и частоту Ω вынужденных колебаний. Результаты занесите в табл. 5.3.

9. По данным табл. 5.3 постройте резонансную кривую – график зависимости амплитуды вынужденных колебаний α_m от частоты Ω . На графике отметьте значение собственной частоты ω_0 , резонансной частоты Ω_p и резонансной амплитуды α_p .

10. Для указанной преподавателем частоты Ω

определите по резонансной кривой соответствующее значение амплитуды α_m вынужденных колебаний;

рассчитайте сдвиг фаз ψ (в радианах) по формуле (5.26), используя уже полученные значения ω_0 (см. табл. 5.1) и β (табл. 5.4).

Занесите полученные значения α_m , Ω , ψ в табл. 5.5.

Таблица 5.5

| α_m | Ω | ψ |
|------------|----------|--------|
| | | |

Результат работы

1. Запишите вывод о том, можно ли применять к исследуемому маятнику формулу (5.9), полученную на основе идеализированной динамической модели, сравнив для этого экспериментальные значения периода колебаний реальной системы T и теоретические значения периода собственных колебаний T_0 .

2. Запишите вывод о том, соответствуют ли экспериментальная зависимость амплитуды затухающих колебаний от числа колебаний теоретической зависимости.

3. Запишите вывод о том, соответствуют ли вид экспериментальной резонансной кривой теоретической зависимости для принятой модели линейной системы. Можно ли считать вынужденные колебания маятника, наблюдаемые в опыте линейными?

4. По данным табл. 5.4 запишите уравнение затухающих колебаний маятника (см. формулу (5.14)) с числовыми коэффициентами.

5. По данным табл. 5.5 запишите уравнение вынужденных колебаний маятника (см. формулу (5.24)) с числовыми коэффициентами.

Контрольные вопросы

1. Что называют положением устойчивого равновесия механической системы? Приведите примеры устойчивого равновесия? Какие движения совершает механическая система при малых отклонениях от положения устойчивого равновесия?

2. Как определить число степеней свободы колебательной системы? Сколько степеней свободы имеет маятник в данной лабораторной работе?

3. Какое движение называют колебательным? Какие колебания называются периодическими? Что называют периодом колебаний?

4. Какие колебания называют гармоническими? Что такое период, частота, циклическая частота гармонических колебаний? Какая между ними связь?

5. Что такое амплитуда, фаза, начальная фаза гармонических колебаний? Какой вид имеет график гармонических колебаний?

6. Какие колебания называют собственными (свободными)? При каких условиях они возникают?

7. От чего зависят частота, период, амплитуда и начальная фаза собственных колебаний консервативной системы?

8. Какие колебания называют затухающими, в каких механических системах они возникают? Какой вид имеет график затухающих колебаний?

9. Являются ли затухающие колебания гармоническими? периодическими? Что называют периодом затухающих колебаний?

10. От каких параметров колебательной системы зависят частота и период затухающих колебаний?

11. По какому закону изменяется амплитуда затухающих колебаний в диссипативной системе с вязким трением?

12. От чего зависят начальная амплитуда и начальная фаза затухающих колебаний?

13. Что называется коэффициентом затухания и логарифмическим декрементом затухания? От чего они зависят? Какая между ними связь?

14. Какие колебания называются вынужденными? При каком воздействии на систему они возникают? Какой вид воздействия на колебательную систему называют кинематическим возбуждением?

15. От каких факторов зависят амплитуда, частота и фаза вынужденных гармонических колебаний?

16. В чем состоит явление резонанса? При каких условиях возникает резонанс? От чего зависит резонансная частота?

17. Как выглядят амплитудно-частотная характеристика вынужденных колебаний (резонансная кривая). Как изменится вид резонансной кривой при увеличении коэффициента затухания?

18. Какие свойства колебательной системы при затухающих и при вынужденных колебаниях характеризует добротность? Как она связана с логарифмическим декрементом затухания?

19. Приведите примеры вредного проявления резонанса. Какими способами можно предотвратить резонанс?

20. Какие колебания называются линейными? Какой вид имеют дифференциальные уравнения собственных незатухающих, затухающих и вынужденных линейных колебаний? Каков вид зависимостей, являющихся решением этих уравнений?

21. Что представляет собой колебательная система – маятник в данной лабораторной работе? Какая координата, определяющая положение маятника, является колеблющейся величиной? Каков физический смысл первой и второй производных по времени от этой координаты?

22. Запишите и проанализируйте общий вид основного закона динамики для вращательного движения? Как на основании этого уравнения были получены дифференциальные уравнения свободных незатухающих, затухающих и вынужденных колебаний маятника?

23. Что называют моментом инерции тела или системы тел относительно оси? Какой формулой выразили момент инерции маятника в лабораторной работе? Какие при этом сделали допущения?

24. Что называют моментом силы относительно оси? Что такое плечо силы?

25. Запишите и проанализируйте выражения для моментов сил, действующих на маятник при колебаниях: момента силы тяжести, момента силы упругости, восстанавливающего момента, момента сил сопротивления, вынуждающего момента. Какие допущения и предположения были сделаны при записи этих формул.

26. Как в лабораторной работе определили логарифмический декремент затухания? Что для этого потребовалось измерить?

27. Как в лабораторной работе определили числовые значения начальной амплитуды, коэффициента затухания, частоты и начальной фазы, необходимые для записи уравнения затухающих колебаний? Что для этого потребовалось измерить?

28. Как в лабораторной работе определили числовые значения амплитуды, частоты и сдвига фаз, необходимые для записи уравнения вынужденных колебаний? Что для этого потребовалось измерить?

Лабораторная работа № 6К

СЛОЖЕНИЕ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Цель работы. Изучить закономерности движения точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебательных движениях; изучить влияние параметров колебаний (амплитуд, частот и разности фаз) на характер результирующего движения (траектории) точки с помощью компьютерной модели.

Краткие теоретические сведения

Колебательная система может одновременно участвовать в нескольких колебательных процессах одновременно, если в ней действуют две или несколько упругих сил. Любое движение можно представить как сумму двух или более движений, имеющих разные направления. Колебания считаются одинаково направленными, если они происходят в одной плоскости вдоль параллельных прямых. Колебания считаются перпендикулярными, если они происходят в одной плоскости вдоль взаимно перпендикулярных прямых. При колебаниях этого тела могут изменяться координаты тела в плоскости, то есть координаты x и y . В этом случае колеблющееся тело обладает двумя степенями свободы. Под числом степеней свободы механической системы понимают число независимых координат, необходимых для описания состояния этой системы.

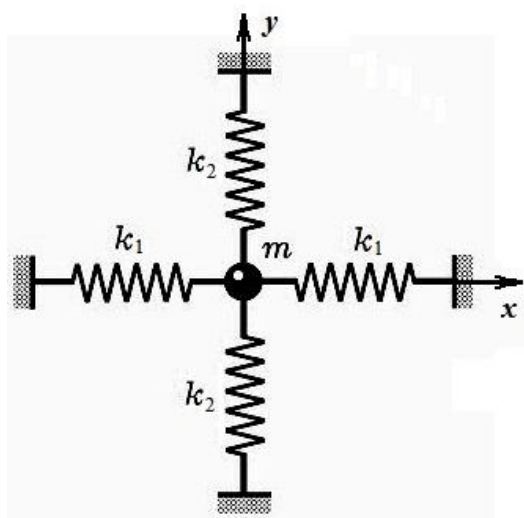


Рис. 6.1

Рассмотрим колебания точки массой m под действием сил упругости в плоскости, в которой лежат пружины (рис. 6.1, $k_x = 2k_1$ и $k_y = 2k_2$ – коэффициенты жесткости пружин). Точка может совершать колебания одновременно вдоль одной оси и вдоль другой оси, перпендикулярной первой. Если возбудить оба колебания, выводя точку из положения равновесия, то она будет двигаться по некоторой криволинейной траектории, форма которой зависит от амплитуд, частот и разности фаз обоих колебаний.

В общем случае колебания вдоль осей x и y описываются уравнениями с различ-

ными амплитудами A_x и A_y , частотами $\omega_x = \sqrt{\frac{k_x}{m}}$ и $\omega_y = \sqrt{\frac{k_y}{m}}$, начальными фазами φ_x и φ_y соответственно:

$$\begin{aligned}x &= A_x \cos(\omega_x t + \varphi_x), \\y &= A_y \cos(\omega_y t + \varphi_y).\end{aligned}\tag{6.1}$$

Результирующее движение будет описываться уравнением траектории, которое можно получить, исключив из уравнений колебаний (6.1) параметр t (время). Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний относятся как целые числа, то траектории результирующего движения представляют собой устойчивые фигуры сложной формы. Такие траектории называются *фигурами*

Лиссажу. Фигуры Лиссажу вписываются в прямоугольник, центр которого совпадает с началом координат, а стороны равны удвоенным амплитудам происходящих колебаний. Формы некоторых траекторий и соответствующие им уравнения рассмотрены ниже.

Сложение перпендикулярных колебаний одинаковой частоты

Наиболее простой вид имеет уравнение движения, если точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебательных движениях с одинаковыми частотами $\omega_x = \omega_y = \omega$. Начало отсчета времени всегда можно выбрать так, чтобы начальная фаза одного из колебаний была равна нулю, тогда уравнения колебаний (6.1) запишутся следующим образом

$$\begin{aligned} x &= A_x \cos(\omega t), \\ y &= A_y \cos(\omega t + \varphi), \end{aligned} \quad (6.2)$$

где φ – разность фаз между колебаниями вдоль осей x и y .

Воспользовавшись тригонометрическими тождествами, приведем уравнения колебаний (6.2) к виду

$$\frac{x}{A_x} = \cos(\omega t), \quad (6.3)$$

$$\frac{y}{A_y} = \cos(\omega t) \cos \varphi - \sin(\omega t) \sin \varphi. \quad (6.4)$$

Из уравнения (6.3) следует, что

$$\cos(\omega t) = \frac{x}{A_x}, \quad \sin(\omega t) = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A_x}\right)^2} \quad (6.5)$$

Подставляя выражения (6.5) в уравнение (6.4), и возводя его в квадрат, получим уравнение траектории в виде

$$\left(\frac{x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_y}\right)^2 - \frac{2xy}{A_x A_y} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (6.6)$$

Из анализа уравнения (6.6) следует, что в общем случае траектория точки описывается уравнением эллипса. Причем точка описывает этот эллипс за время, равное периоду складываемых колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Ориентация осей эллипса и его размеры зависят от амплитуд A_x , A_y и разности фаз φ складываемых колебаний. Результирующее движение точки называют *эллиптически поляризованными колебаниями*.

Если отношение амплитуд изменяется, то эллипс деформируется, не изменяя своего положения относительно направлений слагаемых колебаний. Если изменяется сдвиг фаз, то эллипс одновременно и деформируется, и изменяет свою ориентацию относительно указанных направлений.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1). Если разность фаз $\varphi = \pm (2m + 1) \cdot \pi/2$, где m – целое число, то оси эллипса совпадают с осями координат x и y , а размеры его полуосей равны соот-

ветственно амплитудам A_x и A_y (рис. 6.2). Знак «+» соответствует движению точки по часовой стрелке, а знак «-» – против часовой стрелки.

Уравнение траектории (6.6) при данных значениях разности фаз φ примет вид

$$\left(\frac{x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_y}\right)^2 = 1.$$

Если $A_x = A_y$, то траектория точки представляет собой окружность. Такое движение точки называют *циркулярно поляризованными (поляризованными по кругу) колебаниями*.

2). Если разность фаз $\varphi = \pm m\pi$, где m – целое число, то эллипс вырождается в отрезок прямой. Уравнение траектории (6.6) при данных значениях разности фаз φ примет вид

$$y = \pm \frac{A_y}{A_x} x.$$

Знак «+» соответствует четным значениям m , то есть сложению синфазных колебаний (рис. 6.3), а знак «-» – нечетным значениям m , то есть сложению колебаний, происходящих в противофазе (рис. 6.4).

В этих случаях точка совершает *линейно поляризованные колебания*. Она колеблется с частотой ω складываемых колебаний и амплитудой

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

вдоль прямой линии, составляющей с осью x угол

$$\varphi = \arctg\left[\frac{A_y}{A_x} \cos(m\pi)\right].$$

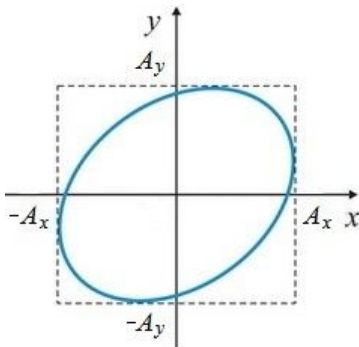


Рис. 6.2

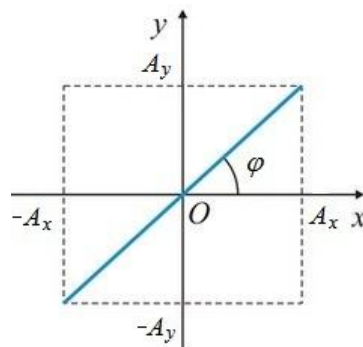


Рис. 6.3

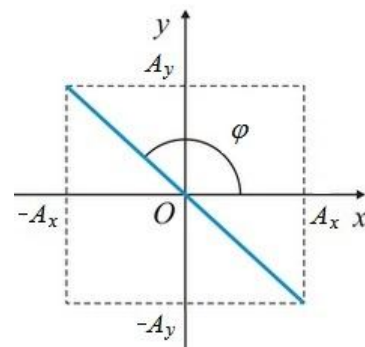


Рис. 6.4

Сложение перпендикулярных колебаний с кратными частотами

Рассмотрим, как будет выглядеть траектория результирующего движения, когда частоты колебаний ω_x и ω_y соотносятся как целые числа. Пусть разность фаз $\varphi = 0$. Тогда уравнения колебаний будут иметь вид

$$x = A_x \cos(\omega_x t), \tag{6.7}$$

$$y = A_y \cos(\omega_y t). \tag{6.8}$$

Случай $\omega_x : \omega_y = 1 : 1$ соответствует движению точки по прямой и рассмотрен в предыдущем разделе.

Рассмотрим случаи $\omega_x : \omega_y = 1 : 2, 1 : 3$.

В тригонометрии существуют тождества, выражающие $\cos(n\alpha)$ через $\cos\alpha$. Например, $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$; $\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ и т.д. (см. математический справочник). Чтобы получить траекторию движения тела, уравнение колебаний (6.8) раскладывают с помощью тригонометрических тождеств на степени $\cos(\omega t)$; затем в него подставляют значение $\cos(\omega t)$, выраженного из уравнения (6.7). Таким образом, можно получить траектории движения при сложении взаимно перпендикулярных колебаний, отношения частот которых равны:

$$\begin{aligned} \omega_x : \omega_y = 1 : 2 & \quad \frac{y}{A_y} = 2 \frac{x^2}{A_x^2} - 1, \\ \omega_x : \omega_y = 1 : 3 & \quad \frac{y}{A_y} = 4 \frac{x^3}{A_x^3} - 3 \frac{x}{A_x}. \end{aligned}$$

Вид полученных траекторий представлен в табл. 6.1 ($\varphi = 0, \omega_x : \omega_y = 1 : 2, 1 : 3$). Траектории имеют вид незамкнутых кривых, по которым точка совершает периодическое движение.

Таблица 6.1

| | $\omega_x : \omega_y = 1:1$ | $\omega_x : \omega_y = 1:2$ | $\omega_x : \omega_y = 1:3$ | $\omega_x : \omega_y = 2:3$ |
|----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| $\varphi = 0$ | | | | |
| $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ | | | | |
| $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ | | | | |
| $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ | | | | |
| $\varphi = \pi$ | | | | |

В случае обратного соотношения частот $\omega_x : \omega_y = 2 : 1, 3 : 1$, рассуждая аналогично, получим уравнения траектории, соответствующие таким же кривым, что и в предыдущем случае, только повернутым на 90° .

Если уравнение одного из колебаний можно записать через косинус, а уравнение другого колебания – через синус, то удобнее сначала уравнения колебаний возвести в квадрат, выразить синус через косинус, а затем исключать параметр времени t с помощью тригонометрических тождеств.

Например, при сложении колебаний, если $\omega_x : \omega_y = 1 : 2$

$$x = A_x \cos(\omega_x t),$$

$$y = A_y \sin(2\omega_x t) = A_y \cos(2\omega_x t - \pi/2),$$

получим уравнение траектории в виде

$$\frac{y^2}{A_y^2} = 4 \frac{x^2}{A_x^2} \left(1 - \frac{x^2}{A_x^2} \right).$$

Вдоль оси y колебания происходят в два раза чаще, чем вдоль оси x . Сложение таких колебаний приведет к траектории движения в виде замкнутой кривой. Форма траектории представлена в табл. 6.1 ($\varphi = \pi/2$, $\omega_x : \omega_y = 1 : 2$).

Фигуры Лиссажу являются замкнутыми, когда отношение частот равно отношению целых чисел. Если отношение частот равно отношению небольших целых чисел, то фигуры Лиссажу имеют более простой вид. Траектории с другим соотношением частот или сдвигом фаз имеют более сложную форму и описываются более сложными уравнениями.

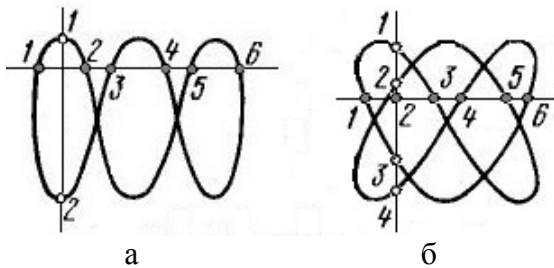


Рис. 6.5

По виду фигур Лиссажу можно определить отношение частот складываемых колебаний. Для этого необходимо определить наибольшее возможное число пересечений вертикальной и горизонтальной прямых с наблюдаемой фигурой и взять их отношение. Например, если фигура пересекается с горизонтальной прямой шесть раз, а – с вертикальной два (рис. 6.5а), то

это означает что $\omega_x : \omega_y = 6 : 2 = 3$, то есть частота колебаний вдоль оси x в три раза больше, чем вдоль оси y . Фигура, изображенная на рис. 6.5б соответствует соотношению частот $\omega_x : \omega_y = 6 : 4 = 3 : 2$.

В технике фигуры Лиссажу применяют для определения неизвестной частоты колебаний. Для этого эти колебания складывают с взаимно перпендикулярными колебаниями известной частоты и определяют частоту неизвестных колебаний по виду фигур Лиссажу.

Порядок выполнения измерений

Описание программы «Фигуры Лиссажу»

Программа позволяет задавать параметры складываемых колебаний: амплитуды, частоты и разность фаз. Параметры уравнений можно изменить двумя способами: перемещением бегунков под параметрами или вводом чисел в соответствующие окошки.

На панели инструментов расположены три кнопки: «Старт», «Стоп» и «Сброс». В рабочем окне программы на масштабированном поле изображена точка, которая после нажатия кнопки «Старт» вычерчивает траекторию. При нажатии кнопки «Стоп» точка останавливается, при нажатии кнопки «Старт» точка продолжает вычерчивать траекторию. После нажатия кнопки «Сброс» точка возвращается в исходное состояние и возможно изменение параметров колебаний. После изменения параметров и нажатия кнопки «Старт» предыду-

щая траектория стирается автоматически. Также траекторию можно стереть кнопкой «Стереть следы», расположенной внизу рабочего окна программы.

При некорректных действиях следует работать по сообщениям, выводимых программой на экран.

Примечание: изменять амплитуды можно в диапазоне от 0 до 2,0; частоты – от 0 до 20; разность фаз – от 0 до 6,28.

Задание 1. Сложение колебаний одинаковой частоты

1. Введите амплитуды, частоты, разность фаз, учитывая указанные в табл. 6.2 условия. Зарисуйте соответствующие траектории с экрана в масштабе.

Таблица 6.2

| Частоты одинаковые: $\omega_x = \omega_y =$ | | | | | |
|---|-------------------------------|----------------|---|---------------------------|----------------|
| Амплитуды одинаковые: $A_x = A_y =$ | | | Амплитуды различные: $A_x =$ $A_y =$ | | |
| № | Разность фаз | Вид траектории | № | Разность фаз | Вид траектории |
| 1 | $\varphi = 0$ | | 6 | $\varphi = 0$ | |
| 2 | $\varphi = \pi = 3,14$ | | 7 | $\varphi = \pi = 3,14$ | |
| 3 | $\varphi = \pi/2 = 1,57$ | | 8 | $\varphi = \pi/2 = 1,57$ | |
| 4 | $\varphi = 3\pi/2 = 4,71$ | | 9 | $\varphi = 3\pi/2 = 4,71$ | |
| 5 | $\varphi =$ (произвольное) | | | | |

Задание 2. Сложение колебаний различной частоты

1. Введите амплитуды, частоты и разность фаз, учитывая указанные в табл. 6.3 условия. Зарисуйте соответствующие траектории с экрана в масштабе.

Таблица 6.3

| Амплитуды одинаковые: $A_x = A_y =$ | | | | | | | |
|-------------------------------------|--|------------------|----------------|---|--|------------------|----------------|
| № | Частоты | Разность фаз | Вид траектории | № | Частоты | Разность фаз | Вид траектории |
| 1 | $\omega_y = 2\omega_x$ $\omega_y =$ $\omega_x =$ | $\varphi = 1,57$ | | 5 | $\omega_y = \frac{1}{3}\omega_x$ $\omega_y =$ $\omega_x =$ | $\varphi = 0$ | |
| 2 | $\omega_y = 3\omega_x$ $\omega_y =$ $\omega_x =$ | $\varphi = 1,57$ | | 6 | $\omega_y = \frac{1}{3}\omega_x$ $\omega_y =$ $\omega_x =$ | $\varphi = 1,57$ | |
| 3 | $\omega_y = 2\omega_x$ $\omega_y =$ $\omega_x =$ | $\varphi = 0$ | | 7 | $\omega_x \approx \omega_y$ $\omega_y =$ $\omega_x =$ | $\varphi = 1,57$ | |
| 4 | $\omega_y = 3\omega_x$ $\omega_y =$ $\omega_x =$ | $\varphi = 0$ | | | | | |

Результат работы

1. Запишите вывод о том, как параметры взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты влияют на характер результирующего движения.
2. Запишите вывод о том, как параметры взаимно перпендикулярных колебаний различной частоты влияют на характер результирующего движения.

Контрольные вопросы

1. Что такое фигуры Лиссажу? Какими параметрами складываемых колебаний определяется вид фигуры Лиссажу?
2. Выведите формулу для траектории точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях одинаковой частоты.
3. Определите вид траектории точки, которая участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях с одинаковыми частотами. При каких значениях разности фаз траекторией движения будет прямая и при каких – эллипс?
4. Какие фигуры возникают в результате сложения взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты и разностью фаз $0, \pi/2, \pi$?
5. Как влияет изменение разности фаз между накладываемыми колебаниями одинаковой частоты на вид траектории?
6. Как получить линейно поляризованные колебания; эллиптически поляризованные колебания; колебания, поляризованные по кругу?
7. Почему одному и тому же соотношению частот соответствует ряд фигур Лиссажу?
8. При каком условии фигуры Лиссажу являются замкнутыми траекториями?
9. Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях. Траектории движения точки в различных случаях изображены на рис. 6.6–6.8. Каковы амплитуды и разность фаз складываемых колебаний в каждом случае?
10. Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях. Траектории движения точки изображены на рис. 6.9 и 6.10. Чему равно отношение частот ω_x/ω_y ?

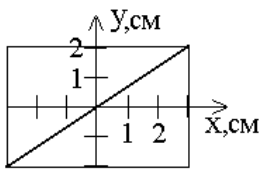


Рис. 6.6

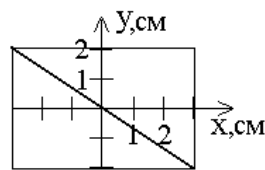


Рис. 6.7

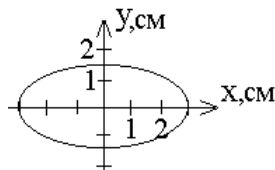


Рис. 6.8

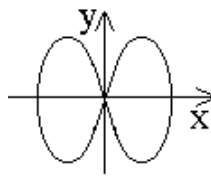


Рис. 6.9

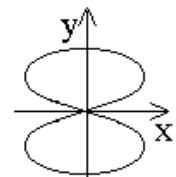


Рис. 6.10

11. Как изменяется отношение числа пересечений осей x и y с фигурой Лиссажу при увеличении разности фаз, но при неизменных частотах ω_x и ω_y ?
12. Как изменится вид фигуры Лиссажу, если амплитуду одного из колебаний увеличить в 2 раза?
13. Как по фигуре Лиссажу определить отношение частот составляющих колебаний?
14. Как по фигуре Лиссажу определить фазовый сдвиг между двумя колебаниями с равными частотами?

СПИСОК ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин, М.М. Теория колебаний: учебник для студентов вузов / М.М. Ильин, К.С. Колесников, Ю.С. Саратов. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 271 с.
2. Алдошин, Г.Т. Теория линейных и нелинейных колебаний / Г.Т. Алдошин. СПб.: Лань, 2013. 320 с.
3. Яворский, Б.М. Справочник по физике: для инженеров и студентов вузов / Б.М. Яворский, А.А. Детлаф. М.: Наука, 1990. 939 с.
4. Тимошенко, С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко. М.: КомКнига, 2006. 440 с.
5. Стрелков, В.П. Введение в теорию колебаний / В.П. Стрелков. СПб.: Лань, 2005. 440 с.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|----|
| Лаб. раб. № 1. Исследование затухающих колебаний наклонного маятника ... | 3 |
| Лаб. раб. № 2. Исследование колебаний крутильного маятника (торсионных колебаний) | 12 |
| Лаб. раб. № 3. Изучение колебаний связанной системы, имеющей две степени свободы | 20 |
| Лаб. раб. № 4. Исследование колебаний обратного маятника | 32 |
| Лаб. раб. № 5. Изучение затухающих и вынужденных колебаний маятника с одной степенью свободы | 40 |
| Лаб. раб. № 6К. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний | 53 |
| Список дополнительной литературы | 60 |

Александр Федорович Гусев
Владимир Васильевич Измайлов
Марина Вячеславовна Новоселова

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

Издание первое

Корректор А.Ю. Соколова
Технический редактор Т.С. Самборская

Подписано в печать

Формат 60x84 /16

Физ. печ. л. 3,75

Тираж 50 экз.

Бумага писчая

Уч.-изд. л. 3,26

С –

Усл. печ. л. 3,49

Заказ №

Редакционно-издательский центр

Тверского государственного технического университета

170026, Тверь, наб. Афанасия Никитина, 22