

# Лекции по механике и молекулярной физике

**Введение**

Механика – раздел физики, который изучает закономерности механического движения и причины, вызывающие это движение.

Механическое движение – это изменение положения тел в пространстве относительно друг друга с течением времени.

Для описания механического движения твердых тел в зависимости от условий конкретных задач используются упрощенные *физические модели*:

материальная точка – это тело, обладающее массой, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь;

абсолютно твердое тело – тело, деформацией которого в условиях данной задачи можно пренебречь, то есть расстояние между любыми двумя точками этого тела остается постоянным;

абсолютно упругое тело – тело, деформация которого подчиняется закону Гука, а после прекращения действия внешней силы тело полностью восстанавливает свои первоначальные размеры и форму;

абсолютно неупругое тело – тело, полностью сохраняющее деформированное состояние после прекращения действия внешних сил.

Любое движение твердого тела можно представить как результат поступательного и вращательного движений.

Поступательное движение – это движение, при котором любая прямая, жестко связанная с телом, остается параллельной своему первоначальному положению.

Вращательное движение – это движение, при котором все точки тела движутся по траекториям в виде окружностей, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения.

**К и н е м а т и к а**

Кинематика – раздел механики, который изучает движение тел, не рассматривая причины, вызвавшие это движение.

**Траектория. Перемещение. Путь**

Тело, относительно которого рассматривается данное движение, называется телом отсчета.

Для количественного описания движения с телом отсчета связывают систему координат. Наиболее распространенная система координат – декартова система, образованная тремя взаимно перпендикулярными осями координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Совокупность системы координат и часов, связанных с телом отсчета, называется системой отсчета.

Положение некоторой материальной точки  $A$  при ее движении в пространстве можно задать различными способами.

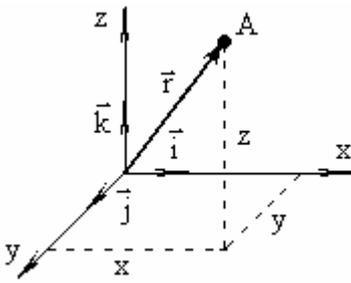


Рис. 1.

В векторном способе описания движения положение точки A характеризуется радиус-вектором  $\vec{r}$ , проведенным из начала системы координат в данную точку (рис. 1).

В координатном способе описания движения положение точки A характеризуется координатами  $x, y, z$ , которые представляют собой проекции радиус-вектора  $\vec{r}$  точки на соответствующие оси (рис. 1). Радиус-вектор  $\vec{r}$  можно представить в виде векторной суммы его проекций на оси

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k},$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные вектора осей  $x, y, z$  соответственно. Модуль радиус-вектора точки равен

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

В процессе движения точки ее радиус-вектор может изменяться как по модулю, так и по направлению. Геометрическое место концов радиуса вектора  $\vec{r}$  называют траекторией движения материальной точки. Иными словами, траектория движения представляет собой линию, описываемую материальной точкой в пространстве.

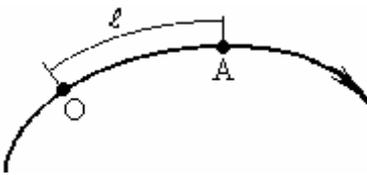


Рис. 2.

Если траектория движения точки заранее известна, применяют естественный (или траекторный) способ описания движения. Положение точки A определяют дуговой координатой  $\ell$ , которая представляет собой расстояние вдоль траектории от выбранного начала отсчета O (рис. 2).

Пусть в процессе движения по некоторой траектории в выбранной системе отсчета за промежуток времени  $\Delta t$  точка переместилась из положения 1 с радиус-вектором  $\vec{r}_1$  в положение 2 с радиус-вектором  $\vec{r}_2$  (рис. 3).

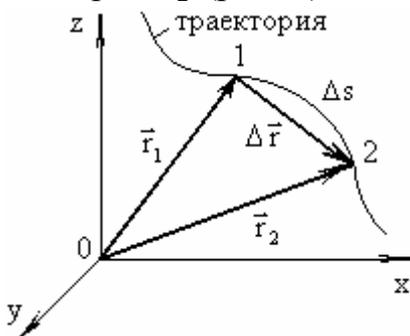


Рис. 3.

Вектор  $\Delta \vec{r}$ , проведенный из начального положения точки 1 в конечное положение 2, называют перемещением материальной точки (рис. 3). Перемещение точки  $\Delta \vec{r}$  в таком случае равно приращению радиус-вектора точки  $\vec{r}_1$  за рассматриваемый промежуток времени

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta \vec{r}.$$

Длина участка траектории, пройденного материальной точкой за промежуток времени  $\Delta t$ , называется длиной пути  $\Delta s$  (см. рис. 3). Очевидно, что длина пути  $\Delta s$  не может убывать и принимать отрицательные значения.

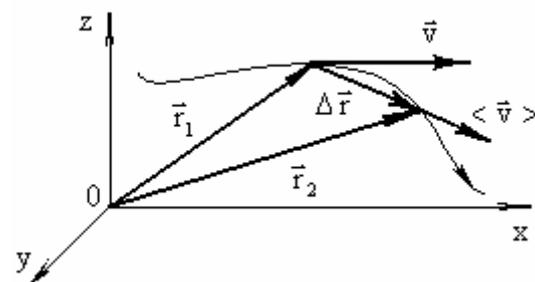
## Скорость и ускорение в векторном способе описания движения

В этом способе положение материальной точки задается с помощью радиус-вектора  $\vec{r}$  (см. 1.1.1). В процессе движения точки ее радиус-вектор может изменяться как по модулю, так и по направлению, являясь функцией времени

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Для характеристики быстроты и направления движения материальной точки в данный момент времени вводится векторная величина – скорость. При этом под словом “скорость” понимают несколько различных физических величин.

Средней скоростью  $\langle \vec{v} \rangle$  называется отношение перемещения точки (см. рис. 1) к промежутку времени, за который произошло это перемещение



$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Рис. 1.

Направление вектора средней скорости  $\langle \vec{v} \rangle$  совпадает с направлением вектора перемещения  $\Delta \vec{r}$  (см. рис. 1).

При устремлении промежутка времени  $\Delta t$  к нулю средняя скорость стремится к предельному значению, которое называется мгновенной скоростью  $\vec{v}$ :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1)$$

Таким образом, мгновенной скоростью  $\vec{v}$  (или просто скоростью) материальной точки называется векторная величина, равная первой производной от радиус-вектора движущейся точки по времени.

Вектор скорости  $\vec{v}$  направлен по касательной к траектории в данной точке в сторону движения материальной точки (см. рис. 1).

По мере уменьшения  $\Delta t$  длина пути  $\Delta s$  приближается к величине приращения радиус-вектора точки  $|\Delta \vec{r}|$  (см. рис. 3 в п. 1.1.1), поэтому модуль скорости равен

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Таким образом, модуль скорости  $v$  материальной точки равен первой производной от пути по времени.

Средней путевой скоростью  $\langle v \rangle$  материальной точки называется отношение пути  $\Delta s$  к промежутку времени  $\Delta t$ , в течение которого этот путь пройден:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Изменение скорости в процессе движения по модулю и направлению характеризуется ускорением  $\vec{a}$ .

Среднее ускорение  $\langle \vec{a} \rangle$  определяется как отношение приращения вектора скорости  $\Delta \vec{v}$  к промежутку времени  $\Delta t$ , в течение которого это приращение

произошло:

$$\langle \bar{a} \rangle = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}.$$

Мгновенным ускорением  $\bar{a}$  материальной точки называется предел, к которому стремится среднее ускорение при  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt}$$

или, с учетом выражения (1),

$$\bar{a} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}.$$

Таким образом, мгновенным ускорением  $\bar{a}$  (или просто ускорением) материальной точки называется векторная величина, равная первой производной от скорости по времени или второй производной от радиус-вектора движущейся точки по времени.

### Скорость и ускорение в координатном способе описания движения

В этом способе положение материальной точки определяется координатами  $x, y, z$  (см. 1.1.1). При движении точки ее координаты изменяются во времени, то есть являются функциями времени:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

По закону независимости движения одновременные перемещения вдоль различных координатных осей могут рассматриваться независимо друг от друга.

Вектор скорости  $\bar{v}$  можно выразить через его проекции на оси координат  $v_x, v_y, v_z$

$$\bar{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k},$$

при этом сами проекции соответственно равны

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (1)$$

Таким образом, проекция скорости материальной точки равна первой производной от координаты по времени.

Модуль полной скорости точки равен

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Вектор ускорения  $\bar{a}$  также можно выразить через его проекции на оси координат  $a_x, a_y, a_z$

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k},$$

при этом сами проекции соответственно равны

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt},$$

или, с учетом уравнения (1),

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Таким образом, проекция ускорения материальной точки равна первой производной от проекции скорости по времени или второй производной координаты по времени.

Модуль полного ускорения точки равен

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

### Скорость и ускорение в естественном способе описания движения

В этом способе (см. 1.1.1) движение точки определено, если известны ее траектория, начало отсчета, положительное направление отсчета дуговой координаты  $\ell$  и закон движения точки

$$\ell = \ell(t).$$

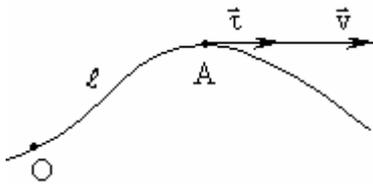


Рис. 1.

Введем единичный вектор  $\vec{\tau}$ , связанный с движущейся точкой A и направленный по касательной к траектории в сторону движения точки (см. рис. 1). Вектор скорости  $\vec{v}$  точки направлен по касательной к траектории, поэтому его можно представить в виде:

$$\vec{v} = v_\tau \cdot \vec{\tau}, \tag{1}$$

где  $v_\tau = \frac{d\ell}{dt}$  – проекция вектора  $\vec{v}$  на направление  $\vec{\tau}$ , причем, ее модуль

$$|v_\tau| = |\vec{v}| = v.$$

Продифференцируем выражение (1) по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = v_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt} + \vec{\tau} \frac{dv_\tau}{dt}.$$

Здесь первое слагаемое характеризует изменение скорости по направлению, второе – изменение скорости по величине.

Таким образом, при неравномерном криволинейном движении точки полное ускорение всегда можно представить как геометрическую сумму двух составляющих (рис. 2)

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau,$$

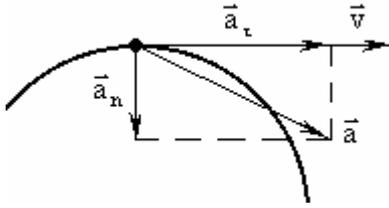


Рис. 2.

где  $\vec{a}_n$  – нормальная составляющая ускорения, характеризующая изменение скорости по направлению,  $\vec{a}_\tau$  – тангенциальная составляющая ускорения, характеризующая изменение скорости по величине. Модуль полного ускорения

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

Тангенциальное ускорение по модулю равно первой производной от модуля скорости по времени

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Вектор тангенциального ускорения направлен по касательной к траектории (см. рис. 2).

Получим формулу для нормальной составляющей ускорения. Пусть материальная точка за малый промежуток времени  $\Delta t$  переместилась из положения А в положение В по дуге окружности радиусом  $R$  (см. рис. 3), причем  $|v_A| = |v_B| = v$ .

Как видно из рисунка, заштрихованные треугольники подобны, откуда  $\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{R}$ . Тогда, если  $\Delta t \rightarrow 0$ , нормальное ускорение будет равно

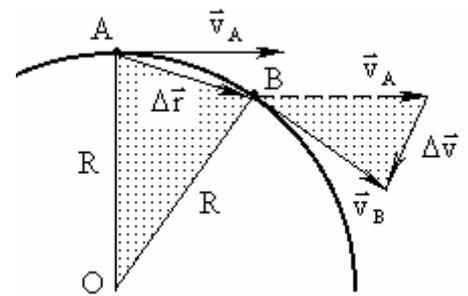


Рис. 3.

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v \Delta r}{R \Delta t} = \frac{v}{R} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t},$$

откуда

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \quad (2)$$

Вектор  $\vec{a}_n$  направлен так же, как вектор  $\Delta \vec{v}$  (см. рис. 3). Если  $\Delta t \rightarrow 0$ , точки А и В располагаются бесконечно близко, и вектор изменения скорости  $\Delta \vec{v}$  практически перпендикулярен вектору скорости, то есть направлен к центру окружности. Поэтому вектор нормального ускорения  $\vec{a}_n$  направлен к центру окружности.

В общем случае, при движении по произвольной кривой, нормальное ускорение также выражается формулой (2), где  $R$  – радиус кривизны траектории в данной точке и вектор  $\vec{a}_n$  направлен по нормали к траектории к центру ее кривизны.

### Угловая скорость и угловое ускорение

Рассмотрим движение материальной точки по траектории в виде окружности

радиуса  $R$  (рис. 1). Поскольку траектория точки заранее известна, применим естественный способ описания её движения (см. 1.1.1).

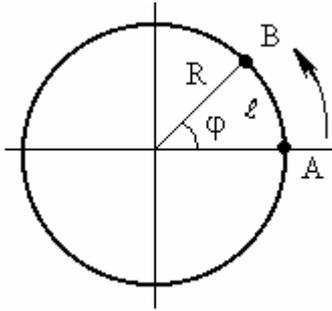


Рис. 1.

Пусть в начальный момент времени точка находилась в положении  $A$ , а спустя некоторый промежуток времени сместилась в положение  $B$ . Дуговая координата точки  $l$  может быть вычислена через угол  $\varphi$  и радиус окружности  $R$ :

$$l = R \cdot \varphi \quad (1)$$

Поскольку  $R = \text{const}$ , положение материальной точки на окружности полностью определяется величиной угла  $\varphi$ , который можно рассматривать в данном случае как угловую координату материальной точки.

На основании уравнения (1) найдем модуль скорости материальной точки (см. 1.1.4):

$$v = v_{\tau} = \frac{dl}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} \quad (2)$$

Обозначим  $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$  и назовем эту величину угловой скоростью движения материальной точки по окружности. Таким образом, угловой скоростью  $\omega$  материальной точки называется первая производная от угловой координаты по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Формула (2) выражает связь линейной и угловой скоростей материальной точки:  $v = \omega \cdot R$ . Из формулы видно, что при постоянной величине угловой скорости  $\omega$  линейная скорость  $v$  точки тем больше, чем дальше она находится от оси вращения.

Аналогично введем понятие углового ускорения. Угловым ускорением  $\varepsilon$  называется первая производная от угловой скорости по времени или вторая производная от угловой координаты по времени:

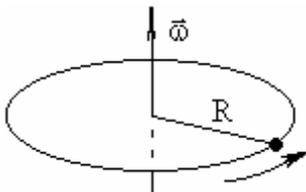


Рис. 2.

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Вектор угловой скорости  $\vec{\omega}$  условно направлен по оси вращения в сторону, откуда движение выглядит происходящим против часовой стрелки (правило правого винта) (см. рис. 2). Вектор углового ускорения  $\vec{\varepsilon}$  при ускоренном движении точки вокруг неподвижной оси совпадает по направлению с вектором  $\vec{\omega}$ , а при замедленном – направлен в противоположную сторону  $\vec{\omega}$ .

Законы Ньютона. Силы**Первый закон Ньютона**

Первый закон Ньютон сформулировал следующим образом: всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не вынуждается приложенными силами изменить это состояние. Тела, не подвергающиеся воздействию внешних сил, называются свободными, а их движение называется свободным движением, или движением по инерции. Поэтому первый закон Ньютона называют еще законом инерции.

Первый закон Ньютона выполняется не во всех системах отсчета. В этом легко убедиться на следующем примере: когда трамвай трогается с места, стоящие в нем пассажиры отклоняются назад, а при резком торможении трамвая стоящие пассажиры наклоняются вперед. Но ведь внешнего воздействия на пассажиров нет – никто их не толкает и не тянет вперед или назад.

Системы отсчета, в которых выполняется первый закон Ньютона, называются инерциальными. К ним относятся системы, движущиеся равномерно и прямолинейно (т.е. без ускорения). Например, движущийся равномерно и прямолинейно вагон трамвая – инерциальная система. В таком вагоне можно стоять, не держась за поручень и не рискуя упасть.

Системы, движущиеся с ускорением, являются неинерциальными. Пример такой системы – тормозящий вагон трамвая, о котором речь шла выше. Другой пример неинерциальной системы отсчета – вагон трамвая на повороте. Даже если он движется с постоянной по величине скоростью, он имеет нормальное ускорение.

**Масса и импульс**

Количественной мерой инертности тел является масса. Масса тела определяется сравнением с эталоном. Исходя из физического смысла массы как меры инертности, сравнивать тела надо по изменению скорости при их взаимодействии.

Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из двух тел, одно из которых считается эталоном массы. В результате взаимодействия тел скорости их изменяются. Многочисленные эксперименты свидетельствуют, что при любом взаимодействии в такой системе

$$m \cdot \Delta v = m_{\text{эт}} \cdot \Delta v_{\text{эт}}, \quad (1)$$

откуда можно выразить массу тела через массу эталона:

$$m = m_{\text{эт}} \frac{\Delta v_{\text{эт}}}{\Delta v}. \quad (2)$$

Как видно из уравнений (1) и (2), чем больше масса тела, т.е. чем больше его инертность, тем меньше изменение его скорости.

Как будет показано далее (1.3.1), уравнение (1) является следствием фундаментального закона природы – закона сохранения импульса.

Импульсом материальной точки называется произведение массы тела на его скорость:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}.$$

Устаревшее название импульса – “количество движения”.

### Второй закон Ньютона

Второй закон Ньютона в наиболее общей формулировке звучит так: производная от импульса материальной точки по времени равна действующей на точку силе:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (1)$$

где  $\vec{p} = m\vec{v}$  – импульс материальной точки. Для тел с постоянной массой

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a},$$

или

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m},$$

т.е. ускорение тела прямо пропорционально действующей на тело силе и обратно пропорционально массе тела.

Уравнение (1) можно записать в виде

$$d\vec{p} = \vec{F} \cdot dt.$$

Эта запись показывает, что изменение импульса материальной точки (тела) зависит не только от величины действующей силы, но и от времени ее действия. Даже малая сила может значительно изменить импульс точки, если будет действовать достаточно долго. При ударе молотком о наковальню сила удара весьма велика, т.к. время удара мало. В технике

стремятся избегать ударных нагрузок, т.к. они часто приводят к поломкам машин и механизмов.

Если тело взаимодействует не с одним, а несколькими телами, то действие каждого тела можно охарактеризовать отдельной силой. Ускорение, которое все совместно действующие силы сообщают телу, будет такое же, какое сообщала бы ему одна сила (равнодействующая), равная геометрической сумме приложенных к телу сил. В этом случае второй закон Ньютона можно записать в виде

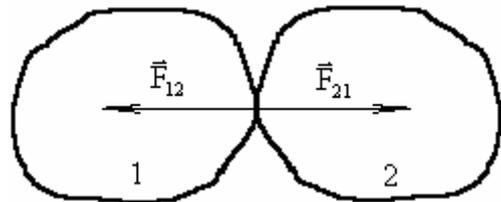
$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i,$$

то есть произведение массы тела на его ускорение равно равнодействующей силе.

Второй закон Ньютона является основным законом механики, так как с его помощью можно полностью описать движение материальной точки, то есть найти ее скорость и координаты как функции времени. Примеры приведены в следующем разделе.

### Третий закон Ньютона

Третий закон Ньютона можно сформулировать следующим образом: силы, с которыми два взаимодействующих тела действуют друг на друга, равны по величине и противоположны по направлению, то есть  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$  (см. рис.). Эти силы приложены к разным телам и поэтому не могут уравнивать друг друга.



### Гравитационная сила. Закон всемирного тяготения

Закон всемирного тяготения определяет одну из фундаментальных сил природы – гравитационную силу, или силу тяготения. Согласно закону всемирного тяготения любые две материальные точки взаимно притягиваются с силой, пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (1)$$

где  $m_1, m_2$  - массы материальных точек,  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$  – гравитационная постоянная. Формула (1) применима не только для точечных тел, размеры которых существенно меньше расстояния между ними, но и для однородных тел, имеющих форму шара. В этом случае  $r$  – расстояние между центрами тел.

Обратите внимание, что в законе всемирного тяготения фигурирует масса, так же, как и во втором законе Ньютона. Но ниоткуда не следует, что это одна и та же физическая величина. Строго говоря, их и называют по-разному: массу, характеризующую инертность тела во втором законе Ньютона, называют инертной массой, а массу, определяющую величину гравитационной силы в законе всемирного тяготения – гравитационной массой. Установить равенство инертной и гравитационной масс можно только экспериментально. В настоящее время равенство гравитационной и инертной масс доказано экспериментально с относительной погрешностью не более  $10^{-10} \%$ .

Под влиянием гравитационных сил происходит движение планет вокруг Солнца, движение спутников вокруг Земли. Сила тяжести также является следствием действия закона всемирного тяготения.

На любое тело, расположенное вблизи поверхности Земли, действует сила тяжести, сообщающая телу, согласно второму закону Ньютона, ускорение свободного падения  $g$ :

$$F = mg .$$

Если не учитывать вращение Земли вокруг своей оси, то сила тяжести обусловлена гравитационным взаимодействием

$$mg = G \frac{Mm}{R^2} , \quad (2)$$

где  $M$  – масса Земли,  $R$  – радиус Земли. Считая инертную массу в левой части уравнения (2) равной гравитационной массе в правой части этого уравнения, получаем ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли:

$$g = \frac{GM}{R^2} \approx 9,81 \text{ м/с}^2 .$$

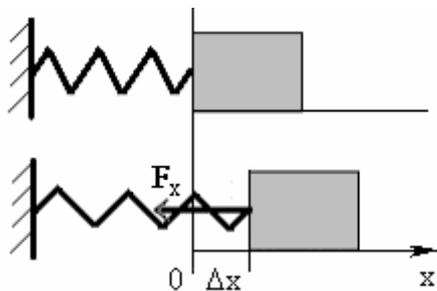
Следовательно, ускорение свободного падения и сила тяжести определяются массой планеты (в данном случае Земли) и ее размерами. На Луне ускорение свободного падения и сила тяжести будут значительно меньше, поскольку гравитационные силы будут слабее.

## Упругая сила. Закон Гука

Упругая сила пропорциональна смещению точки из положения равновесия и направлена к положению равновесия:

$$\vec{F}_{\text{упр}} = -k\vec{r}. \quad (1)$$

Здесь  $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведенный из положения равновесия в положение, занимаемой точкой,  $k$  – коэффициент жесткости. Знак минус показывает, что направление силы упругости всегда обратно направлению смещения от положения равновесия.



Например, растянутая или сжатая пружина (рис.) действует на прикрепленное к ней тело с силой

$$F_x = -k\Delta x,$$

где  $\Delta x$  – деформация (растяжение или сжатие) пружины.

Экспериментально установленная пропорциональность упругой силы величине деформации называется законом Гука.

Кроме сил, связанных с упругой деформацией, существуют силы, неупругие по природе, но также пропорциональные смещению от положения равновесия (уравнение (1)). Такие силы называются квазиупругими.

Рассмотрим однородный стержень длиной  $l$  и площадью поперечного сечения  $S$ , к концам которого приложены силы  $F_1 = F_2 = F$ , в результате чего длина стержня изменяется на  $\Delta l$ . Сила, действующая на единицу площади поперечного сечения, называется напряжением

$$\sigma = \frac{F}{S},$$

а относительное изменение длины

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

называется относительной деформацией. Тогда закон Гука можно записать в виде

$$\sigma = E\varepsilon,$$

то есть напряжение прямо пропорционально относительной деформации. Величину  $E$  называют модулем нормальной упругости или модулем Юнга.

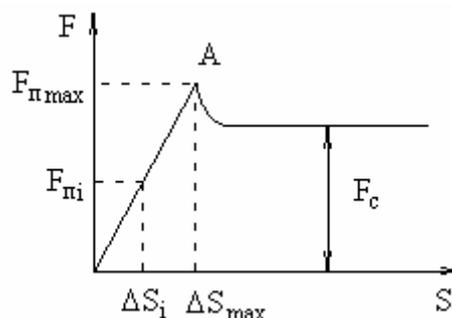
### Сила трения

Сила внешнего трения возникает при взаимном перемещении одного твердого тела по поверхности другого. По закону Амонтона сила трения пропорциональна силе нормального давления  $N$ :

$$F = fN,$$

где  $f$  – коэффициент трения.

Различают силу трения покоя (она возникает при попытке сдвинуть одно тело относительно другого) и силу трения скольжения. Максимальная сила трения покоя  $F_{\text{пmax}}$  обычно несколько больше силы трения скольжения  $F_c$  (см. рис.). Приложение сдвигающей силы  $F_{\text{пi}}$  меньшей, чем максимальная сила трения покоя  $F_{\text{пmax}}$ , вызывает относительное



смещение тел  $\Delta S_i$ . Это смещение обусловлено деформацией тел, в первую очередь деформацией шероховатого слоя на поверхности тел, но тела при этом остаются в состоянии покоя друг относительно друга. Максимальная величина смещения  $\Delta S_{\text{max}}$  называется предварительным смещением. Оно соответствует равенству сдвигающей силы и максимальной силы трения покоя  $F_{\text{пmax}}$  (см. рис.). В этот момент (точка A на рис.) тела скачком приходят в движение друг относительно друга.

Основными причинами трения являются молекулярное взаимодействие соприкасающихся поверхностей и деформация микровыступов шероховатости этих поверхностей.

Сила трения качения возникает при перекатывании одного тела по поверхности другого. По закону Кулона

$$F = \mu \frac{N}{R},$$

где  $\mu$  – коэффициент трения качения,  $N$  – нормальная нагрузка,  $R$  – радиус катка. Сила трения качения обычно значительно меньше силы трения скольжения при той же нагрузке. Основной причиной трения качения являются потери на внутреннее трение (см. 2.6.5).

## Внешние и внутренние силы

Силы, действующие между частицами твердого тела или между различными телами, образующими единую систему, называют внутренними. Сумма этих сил равна нулю и они не могут вызвать движение тела, в отличие от внешних сил, действующих со стороны тел, не входящих в рассматриваемую систему. Если на систему не действуют внешние силы, она называется замкнутой.

Например, силы, действующие между различными частями автомобиля, являются внутренними. Их сумма равна нулю, и они не могут вызвать движение автомобиля. Чтобы автомобиль двигался, нужна внешняя сила - сила трения между шинами и дорожным покрытием. Если эта сила отсутствует (гололед, скользкая дорога) – автомобиль не тронется с места.

Если разбить твердое тело массой  $m$  на элементы  $\Delta m_i$ , то для каждого элемента можно записать второй закон Ньютона:

$$\Delta m_i \vec{a}_i = \vec{F}_{\text{внут}} + \vec{F}_{\text{внеш}},$$

где  $\vec{F}_{\text{внут}}$  – внутренняя сила,  $\vec{F}_{\text{внеш}}$  – внешняя сила. Для всего тела, суммируя, получим

$$\vec{a} \sum \Delta m_i = \sum \vec{F}_{\text{внут}} + \sum \vec{F}_{\text{внеш}}.$$

Поскольку  $\sum \vec{F}_{\text{внут}} = 0$ ,  $\sum \vec{F}_{\text{внеш}} = \vec{F}$  – равнодействующая внешних сил и  $\sum \Delta m_i = M$  – масса тела, то

$$M\vec{a} = \vec{F},$$

то есть тело будет двигаться как материальная точка, в которой как бы сосредоточена вся масса тела и к которой приложена равнодействующая внешних сил  $\vec{F}$ . Эту точку называют центром масс или центром инерции.

Законы сохранения**Закон сохранения импульса**

Закон сохранения импульса является одним из фундаментальных законов природы. Формулируется закон сохранения импульса следующим образом: импульс замкнутой системы материальных точек остается постоянным во времени при любых взаимодействиях внутри системы

$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i = \text{const},$$

где  $\vec{p}$  – импульс системы,  $\vec{p}_i$  – импульс отдельной материальной точки, входящей в систему. Система материальных точек называется замкнутой, если на нее не действуют внешние силы (см. 1.2.9).

В том случае, если система незамкнута, но сумма внешних сил равна нулю, импульс также сохраняется.

Закон сохранения выполняется и для отдельных проекций импульса. Так, если равнодействующая внешних сил, действующих на систему, отлична от нуля, но проекция равнодействующей силы на ось  $x$  равна нулю, то сохраняется проекция импульса системы на ось  $x$ .

**Примеры применения закона сохранения импульса**

1. До выстрела сумма импульсов пули и ружья равна нулю, поскольку они находятся в покое. По закону сохранения импульса после выстрела сумма импульсов также остается равной нулю

$$m_n \vec{v}_n + m_p \vec{v}_p = 0 \quad \text{или} \quad m_n \vec{v}_n = -m_p \vec{v}_p.$$

Ружьё, имеющее сравнительно большую массу, будет двигаться со сравнительно небольшой скоростью в одну сторону, а пуля, имеющая малую массу, – с большой скоростью в противоположную.

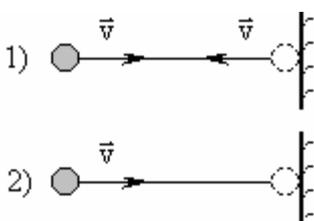


Рис. 1.

2. Шарик массой  $m$  ударяется о неподвижную стенку в первом случае абсолютно упруго, во втором – абсолютно неупруго (см. рис. 1). Для определения импульса, полученного стенкой в обоих случаях, воспользуемся законом сохранения импульса

$$\vec{p}_ш + \vec{p}_c = \vec{p}'_ш + \vec{p}'_c, \quad (1)$$

где  $\vec{p}_ш, \vec{p}_c$  – импульсы шарика и стенки до удара,  $\vec{p}'_ш, \vec{p}'_c$  – импульсы шарика и стенки после удара.

В данной задаче  $p_c = 0$ , так как до удара стенка неподвижна. В случае абсолютно упругого удара уравнение (1) в скалярной форме имеет вид

$$mv = -mv + p'_c.$$

Отсюда импульс, полученный стенкой

$$p'_c = 2mv. \quad (2)$$

В случае абсолютно неупругого удара шарик прилипает к стене, тогда уравнение (1) в скалярной форме имеет вид

$$mv = (M + m)v',$$

где  $(M + m)v'$  – импульс стенки вместе с шариком. Поскольку обычно масса стенки  $M$  намного больше массы шарика  $m$ , то можно считать, что импульс, полученный стенкой

$$p'_c = Mv' = mv. \quad (3)$$

Из сравнения выражений (2) и (3) следует, что при абсолютно упругом ударе импульс, полученный стенкой (следовательно, и сила удара (см. 1.2.3)) в два раза больше, чем при абсолютно неупругом.

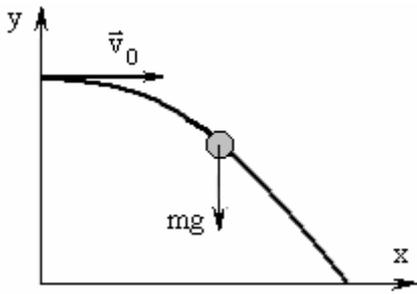


Рис. 2.

3. Рассмотрим пример сохранения проекции импульса. Тело брошено горизонтально с начальной скоростью  $v_0$  (см. рис. 2). Сохраняется ли импульс тела? Сохраняется ли вертикальная и горизонтальная составляющие импульса? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Импульс тела не сохраняется, так как на тело действует постоянная сила – сила тяжести, направленная вертикально вниз. По этой же причине не сохраняется вертикальная составляющая импульса.

Горизонтальная составляющая импульса сохраняется, так как проекция силы тяжести на ось  $x$  равна нулю.

## Работа и мощность

Элементарной работой силы  $\vec{F}$  на перемещении  $d\vec{r}$  называется величина, равная скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения точки приложения силы:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (1)$$

По правилу скалярного произведения векторов можно записать

$$dA = Fdr \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между направлением вектора силы и вектора перемещения.

Пусть тело перемещается под действием силы  $F$  в направлении  $s$  (см. рис. 1). Если направление силы не совпадает с направлением перемещения, то из рис. 1 видно, что произведение  $F \cos \alpha = F_s$ . Тогда можно записать

$$dA = F_s ds, \quad (2)$$

то есть элементарная работа силы измеряется произведением проекции силы на направление перемещения на величину пути (перемещения) (очевидно, что модуль элементарного перемещения  $d\vec{r}$  равен величине элементарного пути  $ds$ ).

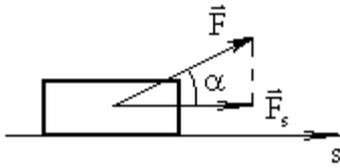


Рис. 1.

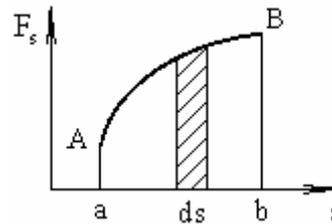


Рис. 2.

Если сила меняется по величине, то для бесконечно малого пути  $ds$  (см. рис. 2) можно пренебречь изменением силы на этом участке и рассчитать элементарную работу по формуле (2). Для участка конечной длины, на пути от точки  $a$  до точки  $b$ , работу получим как сумму элементарных работ, интегрируя выражение (2):

$$A_{ab} = \int_a^b F_s(s) ds.$$

Геометрически работа на элементарном участке пути  $ds$  равна площади заштрихованной полоски (см. рис. 2), а работа на пути  $ab$  будет равна площади  $aABb$  (геометрический смысл интеграла).

Работу измеряют в джоулях (Дж).

Работу, совершенную в единицу времени, называют мощностью

$$N = \frac{dA}{dt}.$$

Выражая работу из формулы (1), получаем

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v},$$

т.е. мощность равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости точки приложения силы.

Мощность измеряется в ваттах (Вт).

## Кинетическая энергия

Кинетической энергией обладают движущиеся тела. Пусть материальная точка движется под действием силы  $F$ , которая, для простоты рассуждений, совпадает с направлением перемещения. Эта сила совершает работу  $dA = Fds$  (см. 1.3.3). Учитывая, что по второму закону Ньютона  $F = m \frac{dv}{dt}$  и по определению

скорости  $v = \frac{ds}{dt}$ , работу силы  $F$  на элементарном пути  $ds$  можно представить в виде

$$dA = m \frac{dv}{dt} ds = mv dv .$$

Тогда для конечного участка пути

$$A_{12} = \int_1^2 mv dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} .$$

Назовем величину  $E_k = \frac{mv^2}{2}$  кинетической энергией материальной точки.

Очевидно, что

$$A_{12} = E_{k2} - E_{k1} ,$$

то есть работа силы, действующей на материальную точку, равна приращению её кинетической энергии.

Формулу, определяющую кинетическую энергию, можно записать в несколько ином виде:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m^2 v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} .$$

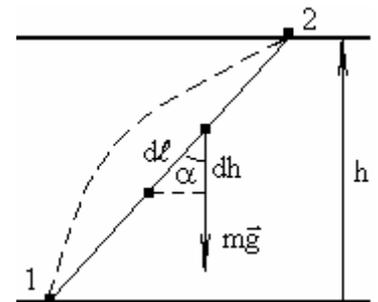
Очевидно, что кинетическая энергия, как и работа, измеряется в джоулях (Дж).

## Потенциальная энергия

Потенциальной энергией обладает материальная точка или тело, находящееся в силовом поле (см. раздел 1.4.). Величина потенциальной энергии зависит от положения точки в силовом поле (иными словами, от координат точки) и от характера сил поля. Например: а) расположение некоторого тела в гравитационном поле Земли и гравитационные силы, действующие на тело, определяют потенциальную энергию этого тела; б) расположение электрических зарядов в электрическом поле и кулоновские силы определяют потенциальную энергию электрических зарядов.

Понятие потенциальной энергии применимо не к любым силовым полям. Рассмотрим некоторые примеры.

Рассчитаем работу силы тяжести при перемещении тела массой  $m$  из точки 1 в точку 2 (см. рис.). Работа на элементарном участке  $d\ell$  будет равна  $dA = -F d\ell \cos \alpha$  (знак минус означает, что направление перемещения  $d\ell$  и проекции силы на направление перемещения противоположны). Поскольку сила тяжести  $F = mg$  и  $d\ell \cos \alpha = dh$ , то получим  $dA = -mg dh$ . Полная работа будет равна



$$A_{12} = -\int_1^2 mg dh = mgh_1 - mgh_2 \quad (1)$$

Точно такой же результат мы получим и для любой другой траектории движения (например, пунктирная линия на рис.).

Полученный результат означает, что работа силы тяжести не зависит от формы траектории точки, а зависит только от начального и конечного положения точки в поле сил тяжести.

Силовое поле, в котором работа силы поля по перемещению материальной точки из начального положения в конечное не зависит от формы траектории, а зависит только от расположения начала и конца перемещения, называется потенциальным, а сами силы – консервативными. Как мы выяснили выше, поле сил тяжести – потенциальное, а сила тяжести – консервативная.

Можно дать более короткое определение потенциального поля. Пусть материальная точка совершает перемещение в потенциальном силовом поле, при этом начальное и конечное положение материальной точки в этом поле совпадают, то есть точка движется по замкнутой траектории. Очевидно, что работа сил поля в этом случае равна нулю, ведь она зависит только от расположения начала и конца перемещения, а они совпадают. Таким образом, потенциальным называется силовое поле, работа сил которого на замкнутой траектории равна нулю.

Обозначим величину  $mgh$  в формуле (1)  $E_p$  и назовем ее потенциальной энергией материальной точки в поле сил тяжести. Как видно из формулы (1)

$$A_{12} = E_{p1} - E_{p2},$$

то есть работа потенциальных сил равна убыли потенциальной энергии.

Сила тяжести – не единственная консервативная сила. К числу консервативных сил относится, например, сила упругости. Докажем это. Рассчитаем работу сил упругости при деформации пружины. В этом случае деформация и сила связаны законом Гука:  $F_x = -kx$  (см. 1.2.7), тогда  $dA = -kx dx$ . Полная работа будет равна

$$A_{12} = -\int_1^2 kx dx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}, \quad (2)$$

то есть потенциальная энергия упругих сил имеет вид

$$E_p = \frac{kx^2}{2}.$$

Из формулы (2) видно, что работа упругой силы также не зависит от формы траектории, а только от начальной и конечной координаты конца пружины, то есть сила упругости консервативная.

Не все силы можно отнести к консервативным. Например, работа сил трения будет зависеть от формы траектории, поэтому силы трения относятся не к консервативным, а к так называемым диссипативным.

Найдем зависимость между потенциальной энергией и консервативной силой. Для простоты сначала рассмотрим движение тела вдоль оси  $x$  под действием силы  $F$ , направленной вдоль оси  $x$ . Поскольку работа потенциальной силы равна убыли потенциальной энергии  $dA = Fdx = -dE_p$ , то отсюда следует, что

$$F = -\frac{dE_p}{dx}.$$

В общем случае можно записать

$$F = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x} + \frac{\partial E_p}{\partial y} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\right),$$

где  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$  – символы частных производных по координатам  $x, y, z$  соответственно. В векторной форме можно записать

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z} \cdot \vec{k}\right), \quad (3)$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные вектора осей  $x, y, z$  соответственно. Выражение в скобках в формуле (3) называют градиентом потенциальной энергии и обозначают  $\nabla E_p$ . В краткой форме уравнение (3) можно записать так

$$\vec{F} = -\nabla E_p,$$

где символ  $\nabla$  (градиент) означает оператор дифференцирования

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{k}\right).$$

Таким образом, консервативная сила равна градиенту потенциальной энергии, взятому с обратным знаком. Знак минус указывает, что сила направлена в сторону убыли потенциальной энергии.

Для определения абсолютного значения потенциальной энергии необходимо выбрать некоторое нулевое положение, в котором потенциальная энергия условно считается равной нулю.

## Потенциальные кривые

Потенциальные кривые представляют собой графический способ изображения зависимости потенциальной энергии от координаты.

Пример: 1. Для упруго деформируемого тела  $E_p = \frac{kx^2}{2}$ , тогда потенциальная кривая будет иметь вид параболы (рис. 1).

2. Тело скользит без трения с горы, тогда потенциальная энергия для каждого значения  $x$  имеет одно определенное значение  $E_p(x) = mg \cdot h(x)$  и потенциальная кривая имеет вид, изображенный на рис. 2.

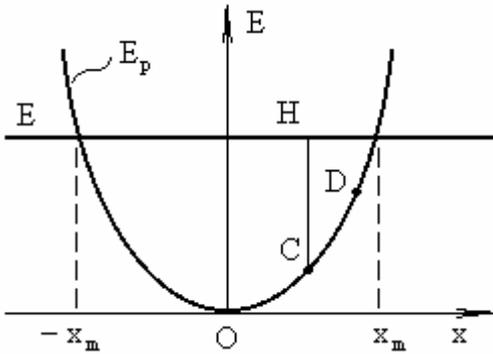


Рис. 1.

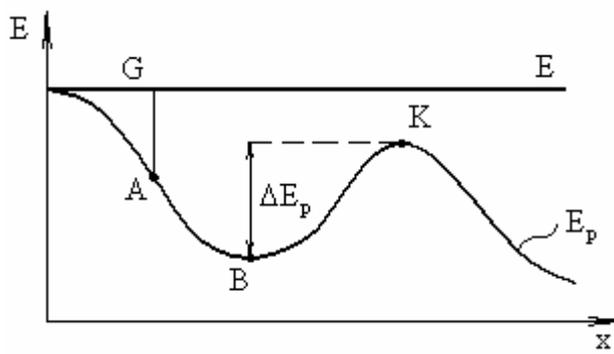


Рис. 2.

Потенциальная кривая позволяет:

1. Определить кинетическую энергию для любого значения параметра  $x$ , если известна полная энергия системы  $E$ . Например, для точки  $A$  (рис. 2) кинетическая энергия выражается отрезком  $AG$ , а для точки  $C$  (рис. 1) отрезком  $CH$ . Полная энергия определяет область, в которой может находиться система, описываемая данной потенциальной кривой, т.к. значение  $x$  должно меняться в пределах  $-x_m \leq x \leq x_m$ , поскольку при  $x < -x_m$  и  $x > x_m$  потенциальная энергия системы будет больше полной (рис. 1). Это невозможно, так как в этом случае кинетическая энергия должна быть отрицательной, а это бессмысленно (см. определение кинетической энергии 1.3.4).

2. Найти значение силы для любого  $x$ . Так как  $F(x) = -\frac{dE_p}{dx}$ , то значение силы определяется тангенсом угла наклона касательной к кривой  $E_p(x)$  (геометрический смысл производной). Например, в точке  $C$  (рис. 1) сила будет меньше, чем в точке  $D$ . В точке  $O$  сила равна нулю.

3. Определить положения равновесия, для которых  $F(x) = 0$ . На рис. 1 и рис. 2 это будут точки  $O, B, K$ , причем в точках  $O$  и  $B$  равновесие устойчивое, а в точке  $K$  неустойчивое. Потенциальную кривую, имеющую вид, изображенный на рис. 1, или участок  $ABK$  на рис. 2 называют потенциальной ямой, а энергию, необходимую для выхода из нее, — потенциальным барьером ( $\Delta E_p$  на рис. 2).

## Закон сохранения механической энергии

Закон сохранения механической энергии формулируется следующим образом: в замкнутой системе, в которой отсутствуют диссипативные силы, сумма кинетической и потенциальной энергий остается постоянной.

$$E_p + E_k = \text{const}.$$

Подчеркнем, что сформулированный закон выполняется только для консервативных систем (в которых отсутствуют диссипативные силы, см. 1.3.5 и 1.4).

Пример: Тело падает с высоты  $h$  (без трения). Его потенциальная энергия на высоте  $h$  равна кинетической энергии в нижней точке

$$mgh = \frac{mv^2}{2},$$

откуда для скорости тела в нижней точке получаем

$$v = \sqrt{2gh}.$$

## **С и л о в о е   п о л е**

Силовым полем называется часть пространства, в каждой точке которой на помещённую туда материальную частицу действует определённая по величине и направлению сила, зависящая только от координат этой точки.

Например, в поле сил тяжести (гравитационном поле) на тело в каждой точке действует определённая гравитационная сила, в электростатическом поле – электрическая сила, в магнитном поле – магнитная сила.

Силевое поле может быть потенциальным – поле консервативных сил (работа которых на замкнутой траектории равна нулю), и диссипативным (работа сил такого поля на замкнутой траектории не равна нулю). В диссипативном поле при перемещении тела имеет место рассеяние (диссипация) энергии, например, за счёт сил трения энергия превращается в теплоту.

Силы называются центральными, если линии их действия проходят через одну и ту же неподвижную точку. Например, движение планет вокруг Солнца происходит под действием сил тяготения, направленных к Солнцу. Поле центральных сил всегда является потенциальным.

Вращательное движение твердых тел**Момент силы**

Моментом силы  $\vec{M}$  относительно точки  $O$  называется вектор, равный векторному произведению радиуса-вектора  $\vec{r}$  точки приложения силы и вектора силы  $\vec{F}$  (см. рис. 1)

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}].$$

В соответствии с правилом векторного произведения модуль момента силы равен

$$M = Fr \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ .

Направлен вектор момента силы перпендикулярно плоскости, в которой лежат радиус-вектор  $\vec{r}$  и вектор силы  $\vec{F}$ , причем так, что вращение винта с правой нарезкой по направлению силы вызвало бы перемещение винта в направлении вектора момента (правило буравчика). Например, на рис. 1 вектор момента силы  $\vec{M}$  направлен от нас за чертеж.

Проекция вектора  $\vec{M}$  на произвольную ось  $z$ , проходящую через точку  $O$ , называется моментом силы относительно оси –  $M_z$  (см. рис. 2). Момент силы относительно оси –

скалярная величина. Он может быть отрицательным или положительным. На рис. 2  $M_z > 0$ , так как направление проекции вектора  $\vec{M}$  совпадает с направлением оси  $z$ . В том случае, если сила  $\vec{F}$  параллельна оси  $z$  или пересекает ее, момент силы относительно этой оси становится равным нулю.

Если ось  $z$  – ось вращения тела, а сила приложена к одной из точек этого тела, то момент силы характеризует способность силы вращать тело вокруг оси. Поэтому момент силы называют также вращательным моментом.

На практике часто приходится рассчитывать момент силы относительно неподвижной оси вращения, причем сила приложена в плоскости, перпендикулярной оси. В этом случае момент силы относительно оси определяют как произведение силы  $F$  на плечо силы  $h$

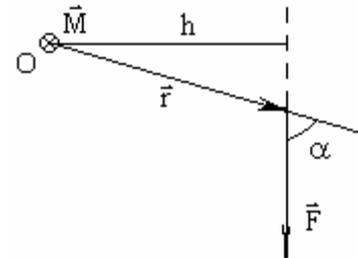


Рис. 1.

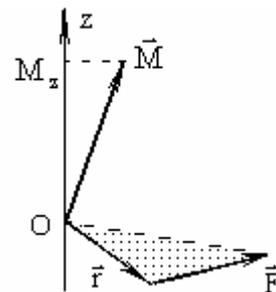


Рис. 2.

$$M_z = Fh.$$

Плечо силы – это кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы (см. рис. 1 и рис. 3).

Момент силы  $M_z$  считается положительным, когда эта сила вращает тело по часовой стрелке, если смотреть вдоль и в направлении оси  $z$  (см. рис. 2). В противоположном случае момент силы относительно оси считается отрицательным. На рис. 3 момент силы  $\vec{F}$  относительно оси  $z$  – отрицательный.

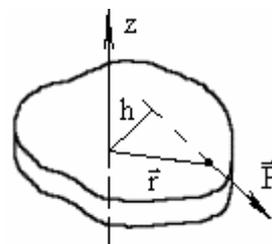


Рис. 3.

### **Момент инерции материальной точки и твердого тела относительно оси**

Твердым телом в механике называют систему жестко связанных друг с другом элементов, каждый из которых можно рассматривать как материальную точку.

Моментом инерции материальной точки относительно оси называют произведение массы точки на квадрат кратчайшего расстояния от точки до оси

$$I_i = m_i r_i^2.$$

Момент инерции тела относительно оси – это сумма моментов инерции относительно той же оси всех материальных точек, из которых состоит тело

$$I = \sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

Если под материальной точкой подразумевать бесконечно малый элемент массой  $dm$ , то момент инерции можно выразить в виде интеграла

$$I = \int_V r^2 dm = \rho \int_V r^2 dV, \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность,  $V$  – объем,  $dm = \rho dV$ .

Как видно из формулы, момент инерции тела зависит от массы тела и от распределения ее относительно оси, то есть от формы, размеров тела и от положения оси вращения относительно тела.

Момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении, то есть играет ту же роль, что и масса тела при поступательном движении.

Пример. Рассчитаем момент инерции диска массой  $m$  и радиусом  $R$  относительно центральной оси. Выделим элемент диска объемом  $dV = h r d\varphi dr$ , где  $h$  – высота,  $r d\varphi$  – длина дуги,  $dr$  – приращение радиуса (см. рис. 1).

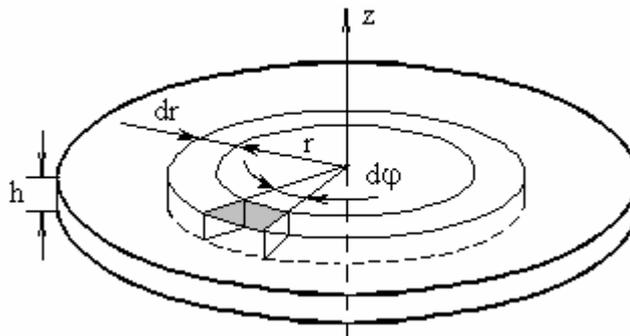


Рис. 1.

Тогда в соответствии с формулой (1)

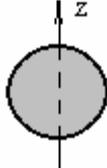
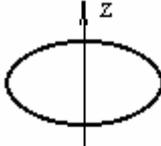
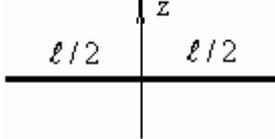
$$I_z = \rho \int_V r^2 dV = \rho h \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 d\varphi dr = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi\rho h R^4}{2}.$$

Поскольку величина  $\pi R^2 h \rho = m$  – масса диска, то момент инерции диска относительно центральной оси

$$I_z = \frac{1}{2} m R^2.$$

Обратите внимание, что вычисленный нами момент инерции не зависит от толщины диска, поэтому полученный результат справедлив для любого сплошного цилиндра. Аналогичным образом можно выразить моменты инерции тел правильной геометрической формы (см. табл.)

Тело	Рисунок (ось $z$ проходит через центр масс)	Формула момента инерции
Диск (сплошной цилиндр) массой $m$ и радиусом $R$		$I_z = \frac{1}{2} m R^2$

Шар массой $m$ и радиусом $R$		$I_z = \frac{2}{5}mR^2$
Тонкое кольцо (обруч, тонкостенная труба) массой $m$ и радиусом $R$		$I_z = mR^2$
Стержень массой $m$ и длиной $\ell$		$I_z = \frac{1}{12}m\ell^2$

Если ось  $z$  смещена от центра масс тела на расстояние  $b$ , то момент инерции относительно этой оси определяют с помощью теоремы Штейнера

$$I_z = I_c + mb^2.$$

Здесь  $I_c$  – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс параллельно оси  $z$ .

Пример. Рассчитаем момент инерции диска относительно оси, проходящей вдоль образующей (см. рис. 3).

$$I_z = I_c + mb^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2.$$

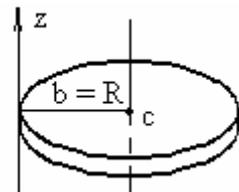


Рис. 3.

## Момент импульса материальной точки и твердого тела

Понятие момента применимо не только для силы, но и для других векторных величин, в частности для импульса.

Моментом импульса материальной точки относительно некоторой точки  $O$  называется векторная величина

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}],$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор, определяющий положение материальной точки относительно точки  $O$ ,  $\vec{p} = m\vec{v}$  – импульс материальной точки. Модуль момента импульса равен

$$L = rp \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{p}$ . Направление вектора момента

импульса, как и направление вектора момента силы, определяется правилом буравчика (см. 1.5.1).

Проекция вектора  $\vec{L}$  на произвольную ось  $z$ , проходящую через точку  $O$ , называется моментом импульса относительно этой оси –  $L_z$ .

Если материальная точка движется в составе твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, ее момент импульса равен

$$L_{zi} = m_i v_i r_i,$$

где  $m_i$  – масса точки,  $v_i$  – скорость точки,  $r_i$  – радиус ее вращения.

Момент импульса твердого тела относительно оси равен сумме моментов импульсов всех материальных точек, из которых оно состоит. Поскольку при вращении тела вокруг неподвижной оси угловая скорость

всех точек одинакова  $\omega = \frac{v_i}{r_i}$ , то

$$L_z = \sum_{i=1}^n L_{zi} = \sum_{i=1}^n m_i v_i r_i = \omega \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

В этой формуле сумма  $\sum_{i=1}^n m_i r_i^2$  – не что иное, как момент инерции тела

относительно оси  $z$  (см. 1.5.2). Отсюда следует, что момент импульса твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость вращения

$$L_z = I_z \omega.$$

### Закон сохранения момента импульса

Если на систему материальных точек не действуют внешние моменты сил, то выполняется закон сохранения момента импульса, который гласит, что момент импульса замкнутой системы остается постоянным во времени

$$\vec{L} = \text{const}.$$

Момент импульса замкнутой системы относительно любой оси так же остается постоянным

$$L_z = \text{const}.$$

Продифференцируем выражение для момента импульса  $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$  относительно некоторой точки  $O$  по времени

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}) = \frac{d}{dt}[\vec{r}, \vec{p}] = \left[ \frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p} \right] + \left[ \vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right].$$

С учетом 2-го закона Ньютона  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$  и определения скорости  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$  можно записать

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r}, \vec{F}] + [\vec{v}, \vec{p}].$$

Вектор  $\vec{p}$  направлен так же, как и вектор  $\vec{v}$ , то есть второе слагаемое является векторным произведением коллинеарных векторов и, следовательно, равно нулю. Первое слагаемое представляет собой момент силы  $\vec{F}$  (см. 1.5.1) относительно той же точки, относительно которой рассчитан момент импульса. Следовательно, мы приходим к соотношению

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (1)$$

Уравнение (1) называют уравнением моментов, так как оно связывает момент импульса и момент силы.

Спроецировав вектора, входящие в формулу (1), на произвольную ось  $z$ , проходящую через точку  $O$ , получим соотношение

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z, \quad (2)$$

согласно которому производная по времени от момента импульса относительно оси равна суммарному моменту внешних сил относительно этой оси.

Рассмотрев формулы (1) и (2), можно заключить, что если  $\vec{M} = 0$ , то  $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ , следовательно  $\vec{L} = \text{const}$ ; если  $M_z = 0$ , то  $\frac{dL_z}{dt} = 0$  и  $L_z = \text{const}$ .

Таким образом, момент импульса сохраняется и для незамкнутой системы, если сумма моментов внешних сил равна нулю. Также сохраняется момент импульса незамкнутой системы относительно оси  $z$  при условии, что сумма моментов внешних сил относительно этой оси равна нулю.

Так как момент импульса – вектор, то в замкнутой системе он сохраняет не только величину, но и направление. Это используется, в частности, в гироскопах. Гироскоп – это осесимметричное тело, обладающее большим моментом инерции, раскрученное до высокой угловой скорости. Такое тело обладает большим моментом импульса,

причем вектор момента импульса направлен вдоль оси вращения. Согласно закону сохранения момента импульса, ось вращения гироскопа стремится сохранить свое положение в пространстве. Чем выше момент импульса, тем более устойчиво состояние гироскопа и он меньше реагирует на внешнее воздействие.

Это свойство гироскопа широко применяется в технике, например, в гирокомпасе. Гироскопическими свойствами обладают также колеса велосипеда и мотоцикла, благодаря чему двухколесные экипажи сохраняют при движении устойчивое положение.

### Основной закон динамики вращательного движения

Рассмотрим вращение твердого тела относительно неподвижной оси. Для момента импульса относительно этой оси справедливо соотношение (см. 1.5.4)

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z.$$

Представим момент импульса в виде  $L_z = I_z \omega$  (см. 1.5.3). Учитывая, что момент инерции твердого тела постоянен, получим

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d(I_z \omega)}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \varepsilon.$$

где  $\varepsilon$  – угловое ускорение. Из последних двух выражений следует

$$I_z \varepsilon = M_z.$$

Это выражение называется основным законом динамики вращательного движения. Он связывает между собой суммарный момент внешних сил относительно оси, момент инерции тела относительно той же оси и угловое ускорение, аналогично тому, как второй закон Ньютона связывает силу с массой и ускорением ( $ma = F$ ). Обратите внимание на аналогию этих законов, из которой наглядно видно, что момент инерции во вращательном движении играет ту же роль, что и масса в поступательном, а именно характеризует инертность тела.

### Кинетическая энергия вращательного движения

Материальная точка массой  $m_i$ , движущаяся по окружности

радиусом  $r_i$  с линейной скоростью  $v_i = r_i \omega_i$ , обладает кинетической энергией

$$E_{ki} = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m_i r_i^2 \omega_i^2}{2}.$$

Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, складывается из кинетических энергий всех материальных точек. Поскольку угловые скорости всех точек одинаковы, то

$$E_k = \sum_{i=1}^n E_{ki} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

Так как второй сомножитель есть момент инерции тела относительно оси вращения, то кинетическая энергия тела при вращательном движении равна:

$$E_k = \frac{I \omega^2}{2}.$$

Если тело участвует в сложном движении, то полная кинетическая энергия является суммой кинетических энергий поступательного и вращательного движений.

### Работа при вращательном движении

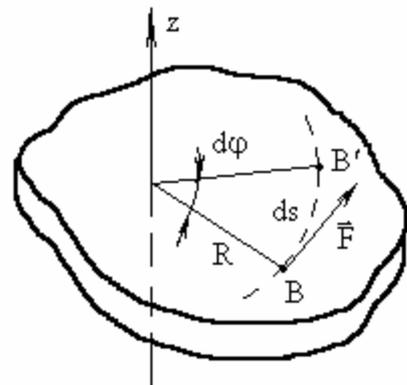
Найдем работу, совершаемую внешней силой при вращательном движении твердого тела. Пусть сила, приложенная к точке В, направлена по касательной к окружности, по которой движется точка (см. рис.). Элементарная работа силы:

$$dA = F ds = FR d\varphi.$$

Так как в данном случае  $R$  – плечо силы  $\vec{F}$ , то  $FR = M_z$  – момент силы относительно оси вращения  $z$ , следовательно работа при вращательном движении рассчитывается по формуле:

$$dA = M_z d\varphi.$$

Произведем замены в этой формуле: момент силы  $M_z = I \varepsilon = I \frac{d\omega}{dt}$ ; угол поворота тела  $\varphi = \omega dt$ , и получим



$$dA = I \frac{d\omega}{dt} \omega dt = I \omega d\omega = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = dE_k.$$

Работа при вращательном движении, как и при поступательном, идет на приращение кинетической энергии тела.

### Аналогия величин при поступательном и вращательном движениях

В таблице сопоставлены формулы механики для поступательного движения и вращения вокруг неподвижной оси. Наглядно видна аналогия формул. Из сопоставления следует, что при переходе к вращательному движению роль линейной скорости играет угловая скорость, роль линейного ускорения – угловое ускорение, роль массы – момент инерции, роль импульса – момент импульса, роль силы – момент силы.

Поступательное движение	Вращение
Перемещение $\vec{r}$	Угол поворота $\varphi$
Линейная скорость $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	Угловая скорость $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Ускорение $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	Угловое ускорение $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
Масса (мера инертности) $m$	Момент инерции (мера инертности) $I$
Импульс $\vec{p}, p = mv$	Момент импульса $\vec{L}, L_z = I_z \omega$
Сила $\vec{F}$	Момент силы $\vec{M}$
Уравнение движения $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$	Уравнение движения $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$
Уравнение движения (второй закон Ньютона) $m\vec{a} = \vec{F}$	Уравнение движения (основной закон динамики) $I_z \varepsilon = M_z$
Кинетическая энергия $E_k = \frac{mv^2}{2}$	Кинетическая энергия $E_k = \frac{I\omega^2}{2}$
Работа $dA = F_s ds$	Работа $dA = M_z d\varphi$
Закон сохранения импульса $\vec{p} = \text{const}, \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \text{const}$	Закон сохранения момента импульса $\vec{L} = \text{const}, \sum_{i=1}^n I_i \omega_i = \text{const}$

## Гармонические колебания

### Свободные гармонические колебания

Колебательным называют движение, повторяющееся во времени. Колебания широко распространены в природе и технике. Например, колеблются мосты при прохождении поезда, корпуса кораблей и крылья самолетов (вибрация), детали машин, маятники часов и т.д. Механические колебания лежат в основе различных технических устройств: вибромолота для забивки свай, вибротранспортера для перемещения сыпучих и кусковых материалов, вибрационного насоса для откачки жидкости из скважин, вибрационного дорожного катка, который уплотняет дорожное покрытие не только собственным весом, но и за счет вибрации, и др. Колеблющиеся струны служат источником звука во многих музыкальных инструментах, от балалайки до скрипки и фортепьяно. На электрических колебаниях основана вся радиотехника.

Свободными (или собственными) называют колебания, которые совершаются за счет энергии, первоначально сообщенной системе, при этом система выводится из положения равновесия, а затем система предоставлена самой себе. Если свободные колебания происходят под действием только упругой (или квазиупругой) силы, то колебательная система является консервативной. Механическая энергия, сообщенная такой системе в начале движения, сохраняется, переходя из кинетической в потенциальную и обратно. В такой системе колебания являются незатухающими. В реальных системах всегда действуют силы сопротивления. По этому первоначальный запас механической энергии убывает, превращаясь в тепловую энергию. В такой системе колебания будут затухающими.

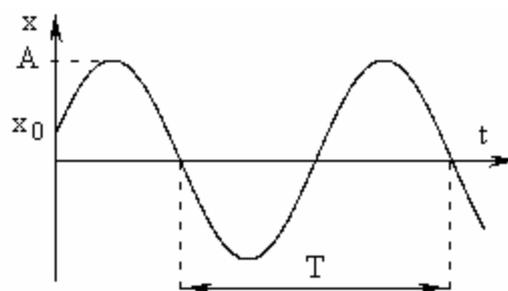
Гармоническими называют колебания, в которых колеблющаяся величина изменяется по закону синуса (или косинуса). Этот вид колебаний особенно важен, т.к. колебания в природе и технике часто имеют характер, близкий к гармоническим колебаниям, а также потому, что периодические процессы иной формы могут быть представлены, как результат сложения нескольких гармонических колебаний.

### Незатухающие гармонические колебания

График незатухающего гармонического колебания представляет собой синусоиду. На рис. показан график, соответствующий уравнению

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Здесь  $x$  – любая периодически изменяющаяся физическая величина (в механике это смещение системы от положения равновесия, соответствующего значению  $x = 0$ );  $t$  – текущее время;  $A$  – амплитуда колебаний – наибольшее смещение от положения равновесия,  $\omega$  – циклическая частота. Величина  $(\omega t + \varphi_0)$  – аргумент периодической функции – называется



фазой колебания,  $\varphi_0$  – начальная фаза колебания, то есть фаза в начальный момент времени  $t = 0$ . При  $t = 0$  смещение равно  $x_0 = A \cos \varphi_0$ .

Время, в течение которого фаза получает приращение  $2\pi$ , а система совершает одно полное колебание и возвращается в исходное состояние, называется периодом колебаний  $T$ . Период может быть определен из условия

$$\omega(t + T) + \varphi_0 = (\omega t + \varphi_0) + 2\pi,$$

откуда

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Частота  $\nu$  – это число колебаний, совершаемых системой в единицу времени.

Очевидно, что  $\nu = \frac{1}{T}$ , откуда получим

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Выразим скорость  $v$  и ускорение  $a$ , тела совершающего гармонические колебания вдоль оси  $x$  по закону  $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ :

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) = -v_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0),$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -a_{\max} \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x,$$

где  $v_{\max} = A\omega$  – амплитудное значение скорости,  $a_{\max} = A\omega^2$  – амплитудное значение ускорения.

## Дифференциальное уравнение собственных незатухающих колебаний

Рассмотрим колебания пружинного маятника. Пружинным маятником называется система, состоящая из тела массой  $m$ , укрепленного на пружине с коэффициентом жесткости  $k$ . Массой пружины пренебрегают (см. рис. 1).

Если маятник сместить на величину  $x$  от положения равновесия, то на него будет действовать упругая сила пружины  $F_{\text{упр}} = -kx$ . Под действием этой силы маятник будет совершать собственные незатухающие колебания (см. 1.6.1), для описания которых используем второй закон Ньютона (см. 1.2.2)

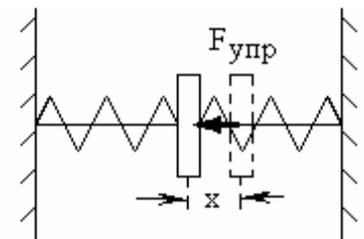


Рис. 1.

$$ma = F_{\text{упр}} \quad \text{или} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \quad (1)$$

Перепишем уравнение (1) в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0, \quad (2)$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad (3)$$

где  $\omega_0^2$  обозначено отношение  $\frac{k}{m}$ .

Соотношение (3) является дифференциальным уравнением собственных незатухающих колебаний. Ему удовлетворяет решение (это можно проверить подстановкой данного решения в уравнение (3)) в виде периодической функции (см. 1.6.2)

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Следовательно, пружинный маятник совершает гармонические колебания. Частота таких колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

называется собственной частотой незатухающих колебаний. Период собственных незатухающих колебаний равен

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Чем выше жесткость пружины (или механической системы), тем больше собственная частота и меньше период колебаний. Увеличение массы приводит к снижению частоты и увеличению периода колебаний.

Зависимость смещения от времени  $x(t)$  незатухающих колебаний на рис. 2 показана сплошной линией, зависимость амплитуды от времени  $A(t)$  – пунктирной линией (в данном случае амплитуда является постоянной величиной, то есть не зависит от времени).

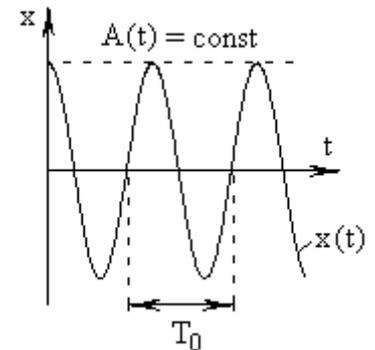
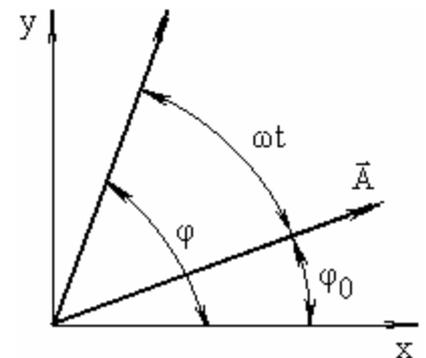


Рис. 2.

## Векторные диаграммы колебаний

Удобной формой представления гармонических колебаний является векторная диаграмма (см. рис.). Для ее построения от оси  $x$  под углом, равным начальной фазе  $\varphi_0$  откладывают амплитуду колебаний как вектор  $\vec{A}$ . Если этот вектор привести во вращение против часовой стрелки с угловой скоростью, равной циклической частоте колебаний  $\omega$ , то угол  $\varphi$  между осью  $x$  и вектором  $\vec{A}$  в момент времени  $t$  будет равняться фазе колебания  $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ .



Проекция вектора  $\vec{A}$  на оси координат меняются по закону гармонических колебаний,

$$x = A \cos \varphi = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$y = A \sin \varphi = A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

подобно тому, как меняется с течением времени смещение маятника от положения равновесия.

### Сложение гармонических колебаний одного направления

На рис. 1 изображена точка С, колеблющаяся вдоль оси х относительно корпуса D, который в свою очередь колеблется в том же направлении относительно заштрихованной опоры.

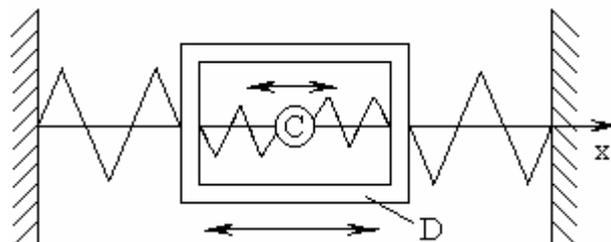


Рис. 1.

В результате точка С участвует по отношению к опоре в двух одинаково направленных колебаниях. Рассмотрим случай, когда оба колебания происходят с одинаковой частотой. Предположим, что колебания точки С относительно корпуса D происходят по закону:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{01}),$$

а колебания корпуса D относительно опоры – по закону:

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{02}).$$

Чтобы получить закон движения точки С относительно опоры, нужно сложить колебания. Удобно выполнить сложение этих колебаний с помощью векторной диаграммы (см. рис. 2). Для этого изобразим на диаграмме колебания обоих маятников, отложив вектора амплитуд  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  под углами  $\varphi_{01}$  и  $\varphi_{02}$  к оси х соответственно.

Сложив эти вектора, получим вектор  $\vec{A}$ , расположенный под углом  $\varphi_0$  к оси х. Из диаграммы видно, что проекция суммы векторов амплитуд равна сумме проекций слагаемых амплитуд:

$$x = x_1 + x_2,$$

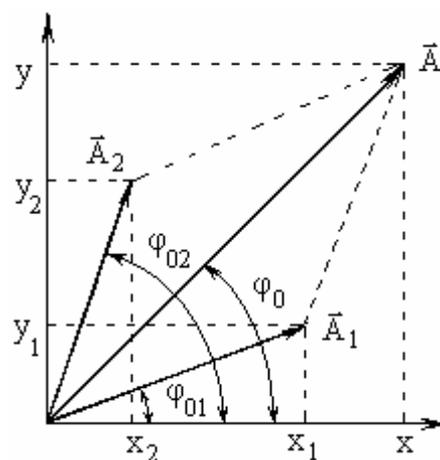


Рис. 2.

поэтому  $\vec{A}$  и  $\varphi_0$  – амплитуда и начальная фаза результирующего колебания, уравнение которого запишется как

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Поскольку частоты складываемых колебаний одинаковы, то угловые скорости вращения складываемых векторов, а также и результирующего вектора будут одинаковы. А это значит, что частота результирующего колебания такая же, как у

складываемых колебаний.

Амплитуду результирующего колебания определим по теореме косинусов:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{01} - \varphi_{02})}.$$

Если окажется, что  $\varphi_{02} - \varphi_{01} = 0$ , то  $A = A_1 + A_2$ . В этом случае колебания усиливают друг друга и происходят с максимальной амплитудой. В частности, если  $A_1 = A_2$ , то  $A = 2A_1$ .

Если  $\varphi_{02} - \varphi_{01} = \pm\pi$ , то  $A = |A_1 - A_2|$ . Колебания гасят друг друга и имеют минимальную амплитуду. В частности, если  $A_1 = A_2$ , то  $A = 0$ .

Начальную фазу результирующего колебания определим из диаграммы (рис. 2):

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{y}{x} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}}.$$

Мы рассмотрели сложение колебаний одинаковой частоты. Если частоты складываемых колебаний различны, то разность фаз меняется со временем и результирующее колебание не будет гармоническим.

### **Сложение взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты**

Пусть точка С может колебаться вдоль оси у относительно корпуса D, который в свою очередь колеблется вдоль оси х относительно заштрихованной опоры. В результате точка С участвует по отношению к опоре в двух взаимно перпендикулярных колебаниях (см. рис. 1). Рассмотрим случай, когда колебания происходят с одинаковой частотой. Предположим, что колебания корпуса D относительно опоры происходят по закону

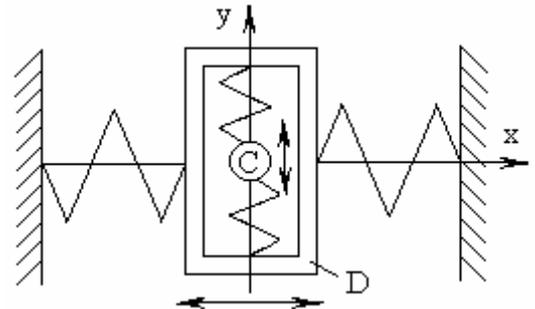


Рис. 1.

$$x = A \cos \omega t,$$

а колебания точки С относительно корпуса D по закону

$$y = B \cos(\omega t + \varphi).$$

Здесь А и В – амплитуды колебаний,  $\varphi$  – сдвиг фаз между колебаниями вдоль оси у по отношению к колебаниям вдоль оси х. Результирующее движение точки получается в результате сложения колебаний. Если исключить из приведенных формул время, то можно получить уравнение траектории движения точки С относительно опоры. В общем случае траектория – эллипс, оси которого наклонены под некоторым углом к осям координат.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Пусть сдвиг фаз  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , тогда

$$x = A \cos \omega t, \quad y = B \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -B \sin \omega t.$$

Поделим обе части этих соотношений на соответствующие значения амплитуд, возведем в квадрат и сложим, учитывая, что  $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$ . Получим уравнение эллипса, приведенное к осям координат (см. рис. 2)

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

При  $A = B$  получаем уравнение траектории в виде окружности с радиусом  $R = A$ .

2. Пусть сдвиг фаз  $\varphi = 0$  или  $\varphi = \pi$ , тогда

$$x = A \cos \omega t, \quad y = \pm B \cos \omega t.$$

Разделив друг на друга правые и левые части уравнений, получим уравнения прямых

$$y = \pm \frac{B}{A} x.$$

Графики этих прямых, то есть траектории движения точки  $C$ , показаны на рис. 3.

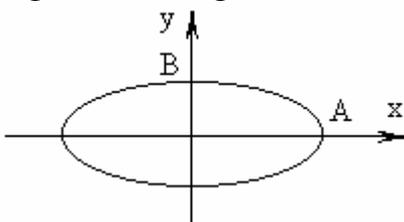


Рис. 2.

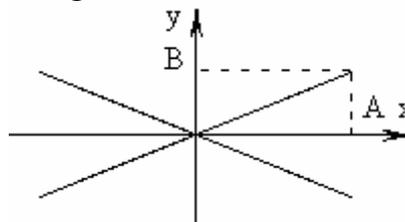


Рис. 3.

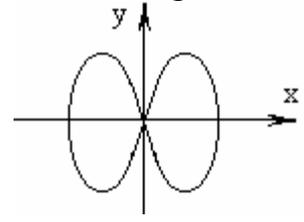


Рис. 4.

Пример 3. Пусть частоты складываемых колебаний не равны, но кратны друг другу. В этом случае траектория движения точки имеет вид сложной кривой – так называемой фигуры Лиссажу. На рис. 4 в качестве примера представлена траектория движения точки, если частота колебаний вдоль оси  $y$  в два раза больше частоты колебаний вдоль оси  $x$ .

### Затухающие колебания. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

Если на систему помимо упругой (или квазиупругой) силы  $F_{\text{упр}}$  действует сила сопротивления движению  $F_c$ , то колебания будут затухающими. Полная механическая энергия системы в этом случае не сохраняется, а непрерывно убывает, переходя в теплоту.

Запишем второй закон Ньютона (см. 1.2.2) для затухающих колебаний

$$ma = F_{\text{упр}} + F_c. \quad (1)$$

Ускорение можно представить как  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ , а силу упругости по закону Гука как  $F_{\text{упр}} = -kx$ . Сила сопротивления движению в вязкой среде пропорциональна скорости  $F_c = -rv = -r \frac{dx}{dt}$ , где  $r$  – коэффициент сопротивления среды. Знак минус показывает, что сила сопротивления направлена противоположно скорости. Подставив выражения для силы упругости и силы сопротивления в уравнение (1), перепишем его в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0. \quad (2)$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3)$$

В уравнении (3) введены обозначения  $2\beta = \frac{r}{m}$  и, как в п. 1.6.3,  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ . Уравнение (3) является дифференциальным уравнением затухающих колебаний. Его решением является функция

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Здесь  $A = A_0 e^{-\beta t}$  – амплитуда колебаний,  $A_0$  – амплитуда в начальный момент времени  $t = 0$ ;  $\beta = \frac{r}{2m}$  – коэффициент затухания.

На рис. 1 приведен график затухающего колебания. Зависимость смещения от положения равновесия от времени  $x(t)$  показана сплошной линией, зависимость амплитуды от времени  $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$  – пунктирной линией. Амплитуда затухающих колебаний экспоненциально убывает со временем, и тем быстрее, чем больше коэффициент затухания.

Частота затухающих колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}.$$

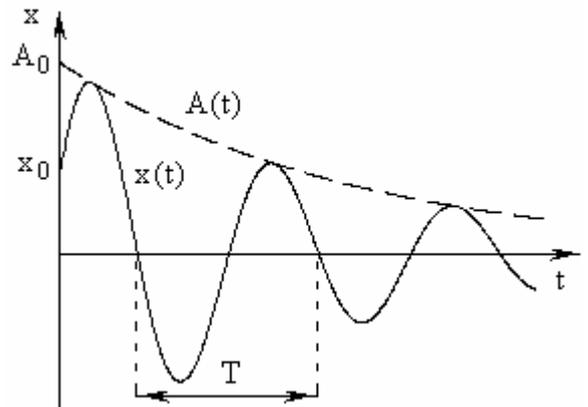


Рис. 1.

Как видно из формулы, частота затухающих колебаний системы  $\omega$  меньше собственной частоты незатухающих колебаний той же системы  $\omega_0$  и зависит от массы, коэффициента жесткости и коэффициента затухания, то есть от

(4)

сопротивления движению.

Как видно из уравнения (4), затухающие колебания возможны только, если  $\omega_0 > \beta$ , иначе частота становится мнимой величиной, что лишено физического смысла. При  $\omega_0 < \beta$  вместо колебаний происходит аperiodический процесс.

Натуральный логарифм отношения амплитуды предыдущего колебания  $A_n$  к амплитуде последующего  $A_{n+1}$  называется логарифмическим декрементом затухания:

$$\lambda = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \beta T.$$

Используя логарифмический декремент затухания, закон убывания амплитуды затухающих колебаний в зависимости от числа колебаний  $N$  можно записать в виде

$$A = A_0 e^{-\beta t} = A_0 e^{-\frac{\lambda}{T} t} = A_0 e^{-\lambda N},$$

так как число колебаний  $N = \frac{t}{T}$ .

Пример. На рис. 2 приведена схема распространенного в технике гасителя колебаний – демпфера. Демпфер представляет собой цилиндр, заполненный вязкой жидкостью, в котором на пружинах закреплен поршень с отверстиями. Колеблющаяся часть машины прикрепляется к штоку поршня. При возникновении колебаний, поршень совершает возвратно-поступательное движение в цилиндре. Жидкость, перетекая через отверстия, создает большое сопротивление движению поршня, поэтому колебания быстро затухают.

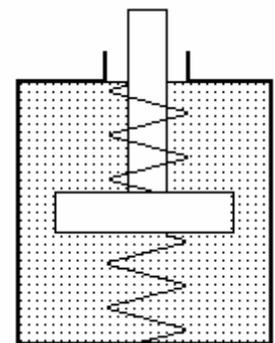


Рис. 2.

**Затухающие и вынужденные колебания****Затухающие колебания. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний**

Если на систему помимо упругой (или квазиупругой) силы  $F_{\text{упр}}$  действует сила сопротивления движению  $F_c$ , то колебания будут затухающими. Полная механическая энергия системы в этом случае не сохраняется, а непрерывно убывает, переходя в теплоту.

Запишем второй закон Ньютона (см. 1.2.2) для затухающих колебаний

$$ma = F_{\text{упр}} + F_c. \quad (1)$$

Ускорение можно представить как  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ , а силу упругости по закону Гука как  $F_{\text{упр}} = -kx$ . Сила сопротивления движению в вязкой среде пропорциональна скорости  $F_c = -rv = -r \frac{dx}{dt}$ , где  $r$  – коэффициент сопротивления среды. Знак минус показывает, что сила сопротивления направлена противоположно скорости. Подставив выражения для силы упругости и силы сопротивления в уравнение (1), перепишем его в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0. \quad (2)$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3)$$

В уравнении (3) введены обозначения  $2\beta = \frac{r}{m}$  и, как в п. 1.6.3,  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ . Уравнение (3) является дифференциальным уравнением затухающих колебаний. Его решением является функция

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Здесь  $A = A_0 e^{-\beta t}$  – амплитуда колебаний,  $A_0$  – амплитуда в начальный момент времени  $t = 0$ ;  $\beta = \frac{r}{2m}$  – коэффициент затухания.

На рис. 1 приведен график затухающего колебания. Зависимость смещения от положения равновесия от времени  $x(t)$  показана сплошной линией, зависимость амплитуды от времени  $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$  – пунктирной линией. Амплитуда затухающих колебаний экспоненциально убывает со временем, и тем быстрее, чем больше коэффициент затухания.

Частота затухающих колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}.$$

(4)

Как видно из формулы, частота затухающих колебаний системы  $\omega$  меньше собственной частоты незатухающих колебаний той же системы  $\omega_0$  и зависит от массы, коэффициента жесткости и коэффициента затухания, то есть от сопротивления движению.

Как видно из уравнения (4), затухающие колебания возможны только, если  $\omega_0 > \beta$ , иначе частота становится мнимой величиной, что лишено физического смысла. При  $\omega_0 < \beta$  вместо колебаний происходит аperiodический процесс.

Натуральный логарифм отношения амплитуды предыдущего колебания  $A_n$  к амплитуде последующего  $A_{n+1}$  называется логарифмическим декрементом затухания:

$$\lambda = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \beta T.$$

Используя логарифмический декремент затухания, закон убывания амплитуды затухающих колебаний в зависимости от числа колебаний  $N$  можно записать в виде

$$A = A_0 e^{-\beta t} = A_0 e^{-\frac{\lambda}{T} t} = A_0 e^{-\lambda N},$$

так как число колебаний  $N = \frac{t}{T}$ .

## Вынужденные колебания

Собственные незатухающие и затухающие колебания происходят под действием внутренних сил: упругой (или квазиупругой)  $F_{упр} = -kx$  и сопротивления среды  $F_c = -rv = -r \frac{dx}{dt}$ . Здесь  $r$  – коэффициент сопротивления,  $k$  – коэффициент жесткости.

Если на систему помимо внутренних сил действует периодически изменяющаяся внешняя вынуждающая сила, то колебания называются вынужденными. При вынужденных колебаниях потери механической энергии системы за счет совершения работы против сил сопротивления среды непрерывно пополняются от внешнего источника за счет действия внешней вынуждающей силы.

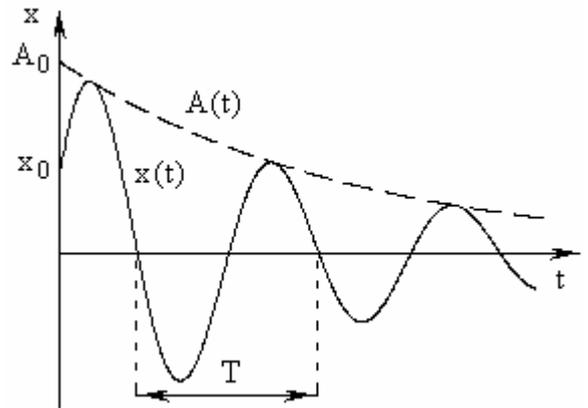


Рис. 1.

Пусть вынуждающая сила меняется с течением времени по гармоническому закону

$$F = F_0 \cos \Omega t ,$$

где  $F_0$  – амплитуда вынуждающей силы,  $\Omega$  – частота действия вынуждающей силы.

Запишем уравнение движения (второй закон Ньютона) для вынужденных колебаний (см. 1.2.2)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_{\text{упр}} + F_c + F$$

Подставим в эту формулу выражения сил, соберем члены, содержащие смещение  $x$  и его производные в левой части и поделим все члены на массу. В результате получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t . \quad (1)$$

или

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t , \quad (2)$$

где как прежде обозначено  $2\beta = \frac{r}{m}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ .

Решением дифференциального уравнения вынужденных колебаний (2) является функция

$$x = A \cos(\Omega t + \varphi) .$$

Здесь  $\Omega$  – частота вынужденных колебаний, которая равна частоте действия вынуждающей силы (период  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ ),  $A$  – амплитуда вынужденных колебаний,  $\varphi$  – сдвиг фаз между колебаниями вынуждающей силы и смещения. В процессе решения получают следующие выражения для расчета амплитуды и сдвига фаз:

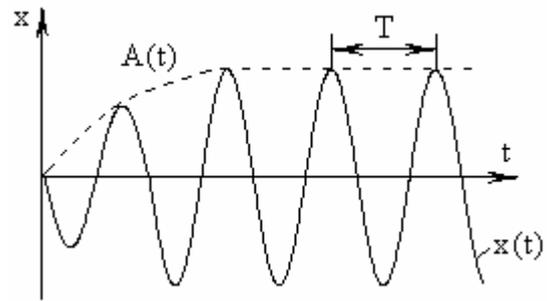
$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} , \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} , \quad (4)$$

где  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  – собственная частота системы,  $\beta = \frac{r}{2m}$  – коэффициент затухания.

Амплитуда вынужденных колебаний зависит от амплитуды и частоты действия внешней силы, от коэффициента затухания, от жесткости системы и от массы системы.

На рис. изображен график зависимости смещения от времени при вынужденных колебаниях (сплошная линия). На начальном участке графика происходит установление колебаний системы. Амплитуда колебаний растет, при этом растет полная энергия колеблющейся системы за счет поступающей извне энергии в результате действия внешней вынуждающей силы. В некоторый момент времени колебания стабилизируются, устанавливается динамическое равновесие между энергией, рассеиваемой в окружающее пространство в виде тепла в результате совершения работы против сил сопротивления, и энергией, поступающей извне за счет действия внешней вынуждающей силы. Зависимость амплитуды от времени  $A(t)$  на рис. 1 показана пунктирной линией.



## Резонанс

Из формулы (3) п. 1.6.9 видно, что если частота вынуждающей силы близка к собственной частоте колебательной системы  $\Omega \approx \omega_0$ , то амплитуда колебаний резко возрастает. Резкое возрастание амплитуды колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к собственной частоте системы называется резонансом.

Точное значение частоты вынуждающей силы, при которой наблюдается резонанс, можно найти, исследовав подкоренное выражение в знаменателе формулы (3) п. 1.6.9 на минимум:

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2},$$

то есть резонансная частота  $\Omega_{\text{рез}}$  тем ближе к собственной частоте  $\omega_0$ , чем меньше величина коэффициента затухания  $\beta$ .

При резонансе достигается наибольшая согласованность между действием внешней силы и собственными колебаниями системы. Если приблизительно принять, что  $\Omega_{\text{рез}} \approx \omega_0$ , то  $\text{tg}\varphi_{\text{рез}} \rightarrow \infty$  (см. формулу (4) п. 1.6.9) и наибольший сдвиг фазы между колебаниями силы и смещения равен

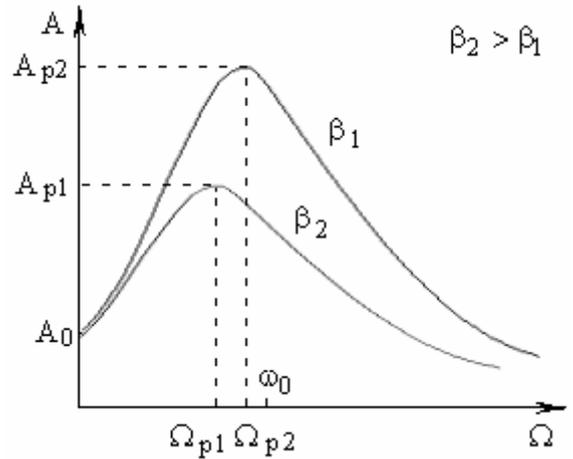
$$\varphi_{\text{рез}} \approx \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, чтобы добиться резонанса, нужно подталкивать маятник с наибольшей силой  $F = F_0$  в тот момент, когда он проходит положение равновесия  $x = 0$ .

Напомним (см. п. 1.6.2), что между смещением колеблющейся точки и ее скоростью также существует сдвиг фаз, равный  $\frac{\pi}{2}$ , то есть при резонансе вынуждающая сила совпадает по фазе со скоростью колеблющейся точки, все время как бы подталкивая ее в такт с колебаниями.

На рис. изображены графики зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы – так называемые резонансные кривые, построенные по уравнению (3) п. 1.6.9. Чем больше коэффициент затухания, тем меньше резонансные амплитуда и частота.

Сравнивая резонансную частоту с вынуждающей частотой, убеждаемся, что они близки, а значит, есть опасность резонанса. При большой численности отряда, то есть при большом значении вынуждающей силы, амплитуда колебаний может стать достаточно высокой для того, чтобы в металле возникли напряжения, которые вызовут разрушение моста. Такие случаи действительно имели место. Так, в 1831 году разрушился мост через реку Ирвель в Манчестере при прохождении по нему в ногу взвода солдат. В 1905 году от резонансных колебаний рухнул Египетский цепной мост через реку Фонтанку в Санкт-Петербурге, когда по нему проходил парадным маршем конногвардейский полк. Поэтому еще в XVII столетии в уставе русской армии солдатам было запрещено шагать по мосту в ногу.



## Маятники

В разделе 1.6.3 был рассмотрен пружинный маятник – система, состоящая из тела, укрепленного на пружине.

Математический маятник – это материальная точка, подвешенная на нерастяжимой и невесомой нити (см. рис. 1). Если отклонить маятник от положения равновесия, то возвращающая сила  $\vec{F}$  является результирующей от сложения силы тяжести  $m\vec{g}$  и силы натяжения нити  $\vec{N}$ . При малых углах отклонения  $\alpha$ :

$$F = mg \operatorname{tg} \alpha \approx mg \sin \alpha = mg \frac{x}{\ell},$$

где  $m$  – масса маятника,  $x$  – смещение маятника от положения равновесия,  $\ell$  – длина нити. Обозначив  $k = \frac{mg}{\ell}$ , и учитывая, что

смещение  $x$  отсчитывается в направлении, противоположном действию возвращающей силы (знак минус), получим выражение, соответствующее квазиупругой силе

$$F = -kx.$$

Дифференциальное уравнение движения маятника под действием квазиупругой силы имеет вид (см. 1 6.3)

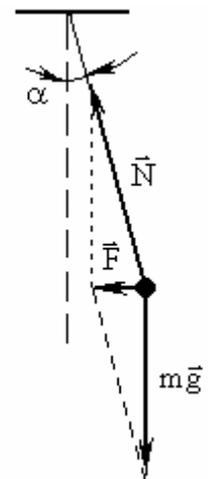


Рис. 1.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0,$$

а его решение

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где собственная частота колебаний  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ .

Таким образом, математический маятник при небольших углах отклонения совершает гармонические колебания. Период колебаний математического маятника

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

зависит от длины маятника и ускорения свободного падения в данной точке Земли и не зависит от массы маятника и амплитуды колебаний.

Физическим маятником – называют твердое тело, подвешенное в точке, не совпадающей с центром масс, и совершающее колебания вокруг горизонтальной оси (см. рис. 2). Запишем основной закон вращательного движения вокруг оси подвеса для физического маятника (см. 1.5.5)

$$I \frac{d^2\alpha}{dt^2} = M_z,$$

где  $\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$  – угловое ускорение,  $I$  – момент инерции относительно оси подвеса маятника. Момент силы тяжести относительно оси равен

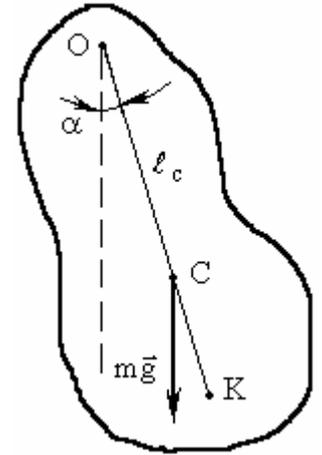


Рис. 2.

$$M_z = -mg\ell_c \sin \alpha \approx -mg\ell_c \alpha,$$

где  $m$  – масса маятника,  $\ell_c$  – расстояние от оси подвеса до центра масс. Мы рассматриваем случай, когда углы отклонения  $\alpha$  малы и  $\sin \alpha \approx \alpha$ . Знак минус берем потому, что направление отсчета угла отклонения и поворот под действием момента силы тяжести имеют противоположные направления.

Дифференциальное уравнение собственных вращательных колебаний физического маятника после подстановок и преобразований приобретает вид:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mg\ell_c}{I} \alpha = 0.$$

С математической точки зрения это уравнение идентично дифференциальному уравнению собственных колебаний под действием упругой (или квазиупругой силы), где вместо линейного смещения  $x$  присутствует угол поворота  $\alpha$ . Решение уравнения будет выглядеть аналогично

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где  $\alpha_0$  – амплитуда колебаний, то есть максимальный угол отклонения маятника,

$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell_c}{I}}$  – собственная частота.

Таким образом, физический маятник при небольших углах отклонения также совершает гармонические колебания. Период колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mg\ell_c}}$$

зависит от массы, момента инерции маятника и расстояния от точки подвеса до центра тяжести.

Если ввести величину  $L_{\text{пр}} = \frac{I}{m\ell_c}$ , называемую приведенной длиной, то формулу для периода колебаний физического маятника можно привести к виду, идентичному формуле для математического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L_{\text{пр}}}{g}},$$

то есть приведенная длина физического маятника – это длина такого математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний данного физического маятника.

Точка К на прямой, соединяющей точку подвеса О с центром масс С (см. рис. 2), и лежащую на расстоянии приведенной длины от оси подвеса называют центром качания физического маятника. Если подвесить физический маятник в точке К, то центр качания переместится в бывшую точку подвеса О, а приведенная длина и, следовательно, период колебаний не изменятся. То есть точка подвеса и центр качания обладают свойством взаимной обратимости.

Математический маятник можно рассматривать как частный случай физического маятника. Для него  $\ell_c = \ell$ , а момент инерции  $I = m\ell^2$ . Тогда период колебаний математического маятника равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mg\ell_c}} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

В о л н ы**Механические волны. Классификация волн**

Если колеблющаяся материальная точка (частица) некоторой среды упруго связана с соседними частицами, то она также вовлекает их в колебания, которые в свою очередь передаются следующим частицам среды и также приводят их в колебательное движение. В результате, колебания начинают распространяться в среде с некоторой конечной скоростью. Процесс распространения колебаний в упругой среде называется волной.

Распространение волны не связано с переносом вещества (материала среды). Например, волны на поверхности воды от прошедшего катера перемещаются, а плавающий на поверхности воды поплавок колеблется вверх и вниз, не перемещаясь в направлении движения волны. От порыва ветра волна пробегает по колосьям пшеницы в поле, а стебли остаются на месте, сгибаясь и снова выпрямляясь. Аналогично ведут себя звуковые волны в воздухе, рябь на воде.

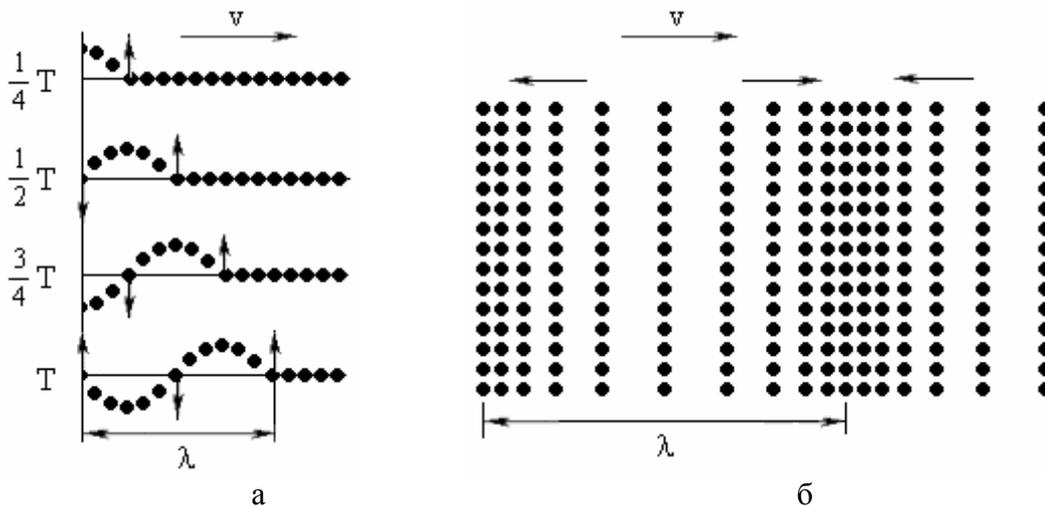


Рис. 1.

Волны в трехмерной упругой среде классифицируются по двум признакам. По направлению колебаний (первый признак) частиц среды волны делятся на поперечные и продольные. По форме волновой поверхности (второй признак) волны делятся на сферические, цилиндрические и плоские.

Волна называется поперечной, если колебания частиц упругой среды относительно своих положений равновесия происходят в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны (скорости волны). Это, например, волны на поверхности жидкости, на поверхности земной коры, электромагнитные волны в вакууме, и т.д. (рис. 1а). Волна называется продольной, если частицы среды колеблются около своих положений равновесия в направлении распространения волны. Такие волны распространяются, например, в жидкости и газе (рис. 1б). На рис. 1 стрелками указано направление смещения точек среды.

Геометрическое место точек, до которого доходят колебания в данный момент времени  $t$ , называется фронтом волны. Фронт волны отделяет часть пространства, уже вовлеченного в волновой процесс, от области пространства, в которой

колебания еще не возникли. Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется волновой поверхностью. Волновых поверхностей бесчисленное множество, волновой фронт один. Волновые поверхности неподвижны, волновой фронт все время перемещается.

При помощи точечного вибратора (колеблющегося точечного источника) в пространстве можно получить сферические волны, у которых волновые поверхности – концентрические сферы (рис. 2а). При помощи линейного вибратора (колеблющегося линейного источника) неограниченной длины генерируются цилиндрические волны. Плоский вибратор (колеблющийся плоский источник) создает плоскую волну (рис. 2б).

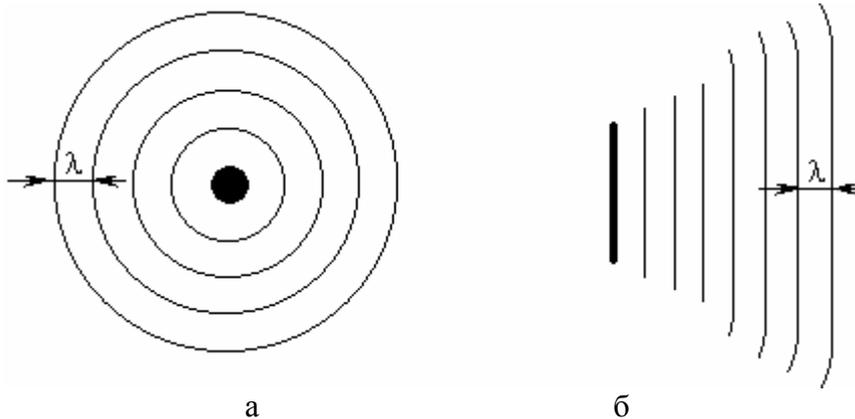


Рис. 2.

Волна распространяется в каждой среде с некоторой скоростью, зависящей от свойств среды. Расстояние, на которое распространяется волна за один период колебаний источника, называется длиной волны, и обозначается  $\lambda$  (см. рис. 1 в п. 1.7.1). Если  $v$  – скорость распространения волны,  $T$  – период колебаний источника,  $\nu$  – частота колебаний источника (период  $T = \frac{1}{\nu}$ ), то

$$\lambda = vT \quad \text{или} \quad v = \lambda\nu .$$

Последнее равенство означает, что если скорость волны постоянна, то с ростом частоты колебаний источника длина волны уменьшается. Эти соотношения справедливы для всех волновых процессов, независимо от их физической природы и вида волн.

### Уравнение плоской волны

Пусть плоский источник в точке среды с координатой  $r=0$  совершает колебания в соответствии с уравнением

$$\xi = A \cos \omega t .$$

Здесь  $\xi$  – смещение точки среды от положения равновесия,  $A$  – амплитуда колебаний,  $\omega$  – циклическая частота.

До произвольной точки среды, находящейся на расстоянии  $r$  от источника колебаний, волна дойдет с запозданием на некоторое время  $\tau = \frac{r}{v}$  ( $v$  – скорость

волны). Следовательно, эта точка будет совершать колебания с запозданием на время  $\tau$  по отношению к источнику:

$$\xi = A \cos \omega(t - \tau)$$

или

$$\xi = A \cos \omega \left( t - \frac{r}{v} \right), \quad (1)$$

то есть смещение колеблющейся точки зависит не только от времени, но еще и от того, на каком расстоянии  $r$  от источника находится рассматриваемая точка, что и отличает волновой процесс от колебательного. Произведя замену  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , получим

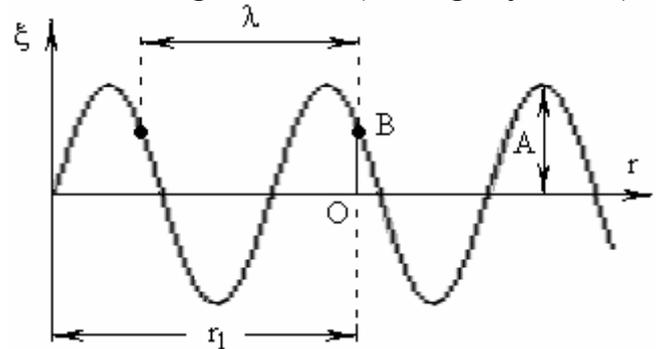
$$\xi = A \cos \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{r}{v} \right) = A \cos \left( \frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} r \right).$$

Это уравнение можно привести к виду, симметричному относительно переменных  $r$  и  $t$ , введя так называемое волновое число  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ :

$$\xi = A \cos(\omega t \pm kr). \quad (2)$$

Уравнение (2) представляет собой уравнение плоской волны. В уравнениях (1) и (2)  $t$  – текущее время,  $\omega$  – циклическая частота,  $(\omega t + kr)$  – фаза. Знак минус в уравнении (2) соответствует движению волны в направлении оси  $r$ , знак плюс соответствует движению волны в противоположном направлении (навстречу оси  $r$ ).

Это уравнение справедливо как для поперечных, так и для продольных волн. График волны – это зависимость смещения  $\xi$  некоторой точки среды  $O$  от расстояния  $r$  от этой точки до источника (см. рис.) для какого-то фиксированного момента времени  $t$ . Из рисунка видно, что для этого момента времени смещение точек волновой поверхности, находящейся на расстоянии  $r_1$  от



источника, равно  $OB$ . Для другого момента времени смещение той же точки изменится. Если проследить за той же точкой в течение некоторого промежутка времени, то увидим, что эта точка совершает колебания около положения равновесия с амплитудой  $A$ .

### Скорость распространения волн в упругой среде

Скорость распространения волны  $v$  в уравнении (1) п. 1.7.3 – это скорость перемещения данной фазы, поэтому ее называют фазовой скоростью. С этой скоростью волна переносит энергию. Фазовая скорость равна

$$v = \frac{dr}{dt}.$$

Скорость распространения волны в упругих средах зависит от свойств среды, вида волны (продольная, поперечная) и, иногда, от частоты (или длины волны), то есть волны с разной длиной могут распространяться с разной скоростью.

Скорости распространения продольных и поперечных волн в твердых телах, соответственно, равняются

$$v_{\text{прод}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad v_{\text{попер}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}.$$

Здесь  $E$  – модуль продольной упругости (иначе его называют модуль Юнга),  $G$  – модуль сдвига,  $\rho$  – плотность материала среды.  $E$  и  $G$  – табличные величины, их можно найти в справочниках механических свойств твердых тел.

В жидкостях и газах упругие деформации сдвига невозможны, в отличие от твердых тел, поэтому в жидких и газообразных средах возможны только продольные волны. Скорость продольных волн в газах

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}},$$

где  $\gamma$  – показатель адиабаты (см. 2.2.4),  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $T$  – абсолютная температура,  $\mu$  – молярная масса,  $P$  – давление,  $\rho$  – плотность.

Примеры: 1. Требуется найти скорость продольных и поперечных волн в стали. Из справочника находим модуль упругости стали  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па, плотность стали  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>. Модуль сдвига для стали  $G = 0,4 E$ .

$$v_{\text{прод}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 5064 \text{ м/с}, \quad v_{\text{попер}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = 3200 \text{ м/с}.$$

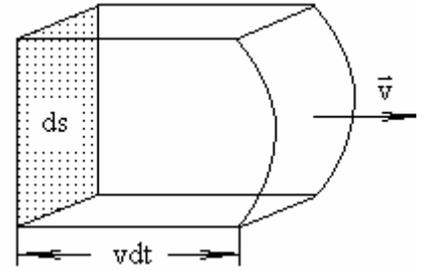
2. Найти скорость звуковых волн в воздухе при комнатной температуре (20° С) и атмосферном давлении ( $P \approx 10^5$  Па). Для воздуха показатель адиабаты  $\gamma \approx 1,4$ , молярная масса  $\mu \approx 29 \cdot 10^{-3}$  кг/моль, газовая постоянная  $R = 8,31$  Дж/(моль · К). Подставляя данные в формулу для скорости волны в газе, получим

$$v_{\text{зв}} = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 8,31 \cdot 293}{29 \cdot 10^{-3}}} \approx 343 \text{ м/с}.$$

## Энергия волны. Плотность потока энергии

Хотя точки среды не перемещаются в направлении распространения волны, а лишь совершают колебания относительно своих положений равновесия, волна переносит энергию от источника в другие точки упругой среды, распространяя колебательное движение в направлении перемещения волнового фронта.

Для характеристики энергии колеблющихся точек среды, в которой распространяется упругая волна, введем понятие плотность энергии  $w$ . Плотность энергии  $w$  равна энергии единицы объема упругой среды, в которой распространяется волна. Размерность плотности энергии, очевидно, Дж/м<sup>3</sup>. Для всех частиц, вовлеченных в колебательное движение в объеме  $dV = vdt ds$  (см. рис.), энергия, очевидно, будет равна



$$dW = w dV = w v dt ds ,$$

где  $v$  – скорость волны,  $ds$  – элементарная площадка, перпендикулярная направлению распространения волны,  $dt$  – элементарный промежуток времени.

Для характеристики энергии, которую переносит волна при распространении в упругой среде, введем понятие плотности потока энергии. Плотностью потока энергии называется количество энергии, проходящее в единицу времени через единичную площадку, помещенную в данную точку среды перпендикулярно направлению распространения волны, то есть

$$J = \frac{\Delta W}{\Delta s \cdot \Delta t} = w v .$$

Плотность потока энергии выражается в Вт/м<sup>2</sup>. Среднее по времени значение плотности потока энергии в данной точке называют интенсивностью волны. Интенсивность звуковых волн называют силой звука.

В соответствии с п. 1.6.8 для плотности энергии можно записать

$$w = \frac{E_{k \max}}{V} = \frac{m v_{\max}^2}{2V} = \frac{\rho v_{\max}^2}{2} ,$$

где  $\rho$  – плотность среды. Так как  $v_{\max} = \omega A$ , для плотности энергии получим выражение

$$w = \frac{\rho \omega^2 A^2}{2} .$$

Соответственно для интенсивности волны получаем выражение

$$J = \frac{\rho \omega^2 A^2 v}{2} .$$

Как следует из последней формулы, интенсивность волны  $J$  пропорциональна квадрату частоты колебаний и квадрату амплитуды.

## Интерференция волн

Если в среде распространяются две или более волн, то в каждой точке среды частицы участвуют одновременно в двух или нескольких колебательных движениях. Результирующее колебание в этом случае определяется правилами сложения колебаний (см. 1.6.6). Интересные результаты получаются при сложении волн от

когерентных источников.

Источники колебаний называются когерентными, если они обладают постоянной во времени разностью фаз  $\delta\varphi = \text{const}$ . Из этого определения очевидно, что когерентные источники имеют одинаковую частоту колебаний. При наложении двух или нескольких когерентных волн происходит перераспределение энергии в пространстве, и в одних точках пространства наблюдается увеличение, а в других – уменьшение амплитуды результирующей волны. Это явление называется интерференцией волн.

Рассмотрим сложение двух плоских гармонических когерентных волн, распространяющихся в одном направлении:

$$\xi_1 = A_1 \cos(\omega t - kr_1) \quad \text{и} \quad \xi_2 = A_2 \cos(\omega t - kr_2).$$

Здесь  $r_1$  и  $r_2$  – расстояния, которые проходят волны от соответствующих источников до точки сложения. Точка совершает результирующее колебание

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A \cos\left(\omega t - k \frac{r_1 - r_2}{2}\right)$$

с амплитудой

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (1)$$

и фазой

$$\varphi = \left(\omega t - k \frac{r_1 - r_2}{2}\right)$$

Разность фаз складываемых колебаний  $\delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = k(r_2 - r_1)$ .

Величина  $\Delta = r_2 - r_1$  называется разностью хода волн. Нетрудно получить соотношение между разностью фаз и разностью хода волн

$$\delta\varphi = k\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta. \quad (2)$$

Так как интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуды колебаний среды (см. 1.7.5), то из формулы (1) следует, что

$$J = J_1 + J_2 + 2\sqrt{J_1J_2} \cos(\delta\varphi).$$

При постоянной по времени разности фаз  $\delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  возможны два крайних случая.

1).  $\cos(\delta\varphi) = 1$ , что соответствует разности фаз  $\delta\varphi = m 2\pi$ , или, как следует из формулы (2), разности хода  $\Delta = m\lambda$ , где  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ , то есть в этом случае разность хода волн равна целому числу длин волн или четному числу полуволен.

В этом случае складываемые колебания совпадают по фазе и амплитуда результирующего колебания принимает максимальное значение  $A = A_1 + A_2$ , а интенсивность волны равна

$$J = J_1 + J_2 + 2\sqrt{J_1J_2},$$

то есть происходит усиление интенсивности колебаний в данной точке среды. При

$J_1 = J_2$  результирующая интенсивность  $J = 4J_1$ .

2).  $\cos(\delta\varphi) = -1$ , что соответствует разности фаз  $\delta\varphi = (2m+1)\pi$ , или разности хода  $\Delta = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$ , где  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ , то есть в этом случае разность хода равна нечетному числу полуволн.

В этом случае складываемые колебания происходят в противофазе и амплитуда результирующего колебания принимает минимальное значение  $A = |A_1 - A_2|$ , а интенсивность равна

$$J = J_1 + J_2 - 2\sqrt{J_1 J_2},$$

то есть происходит уменьшение интенсивности в данной точке среды. При  $J_1 = J_2$  результирующая интенсивность  $J = 0$ , то есть колебания погашают друг друга.

## Стоячие волны

Важный случай интерференции наблюдается при сложении двух встречных плоских волн с одинаковой амплитудой. Практически такой случай наблюдается, например, при сложении падающей и отраженной от какой либо преграды волн. Возникающий в результате сложения таких волн колебательный процесс в среде, где они распространяются, называется стоячей волной.

Рассмотрим интерференцию падающей и отраженной волн, имеющих одинаковые амплитуды, в некоторой точке пространства с координатой  $r$ :

$$\xi_1 = A \cos(\omega t - kr) \quad \text{и} \quad \xi_2 = A \cos(\omega t + kr).$$

Результирующее смещение равно сумме смещений от каждой волны

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos kr \cos \omega t$$

или

$$\xi = A^* \cos \omega t, \tag{1}$$

где  $A^* = 2A \cos kr = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} r$  – амплитуда стоячей волны, не зависящая от времени, но зависящая от координаты. Иными словами, амплитуда, и, следовательно, интенсивность результирующих колебаний меняются от точки к точке.

Интерференция двух встречных волн (прямой и отраженной) не создает волнового движения, так как не сопровождается переносом энергии, а представляет собой колебательный процесс с амплитудой, различной в разных точках пространства. Действительно, уравнение стоячей волны (уравнение (1)) является на самом деле не чем иным, как уравнением гармонических колебаний (см. п. 1.6.2) с переменной амплитудой, зависящей от координаты. Таким образом, еще раз повторим, стоячая волна, в строгом смысле, волной не является.

В точках пространства, координаты которых соответствуют условию

$$\frac{2\pi}{\lambda} r = (2m+1) \frac{\pi}{2},$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$ , амплитуда стоячей волны равна нулю. Эти точки называют узлами стоячей волны, они не совершают колебаний. Координаты узлов принимают значения

$$r = (2m + 1) \frac{\lambda}{4}.$$

Из этого уравнения очевидно, что расстояние между соседними узлами равно  $\frac{\lambda}{2}$ .

Между узлами находятся точки среды, совершающие колебательное движение с различной амплитудой. Точки с координатами, соответствующими условию

$$\frac{2\pi}{\lambda} r = m\pi,$$

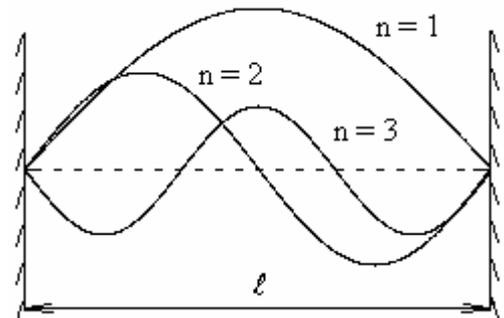
где  $m = 0, 1, 2, \dots$ , колеблются с максимальной амплитудой  $A^* = 2A$ . Эти точки называются пучностями стоячей волны.

Их координаты принимают значения

$$r = m \frac{\lambda}{2}.$$

Расстояние между соседними пучностями, как и между узлами, равно  $\frac{\lambda}{2}$ .

Рассмотрим образование стоячей волны в ограниченном пространстве. Например, в закрытой с обеих сторон трубе, в закрепленной на концах струне возможно существование стоячих волн разной длины (см. рис.), причем на концах трубы или в точках закрепления струны располагаются узлы, так как эти точки не колеблются по условию. Такая система характеризуется не одной, а бесконечно большим числом собственных длин волн  $\lambda_n$  и собственных частот  $\nu_n$ .



Из рис. видно, что в данном ограниченном пространстве могут возникнуть только такие стоячие волны, половина длины которых укладывается на длине  $\ell$  целое число раз. Отсюда длины волн, соответствующие частотам собственных колебаний, находятся из соотношения

$$\ell = n \cdot \frac{\lambda}{2},$$

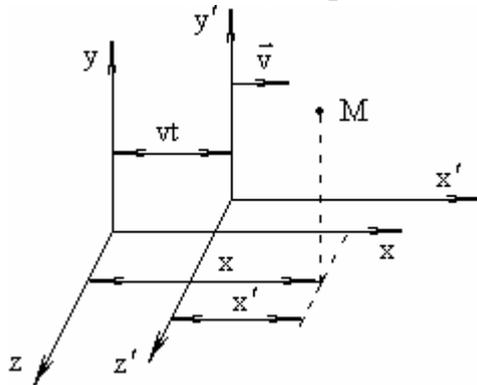
или

$$\lambda_n = \frac{v}{\nu_n} = 2 \frac{\ell}{n},$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$

Элементы специальной теории относительности**Классический принцип относительности (принцип относительности Галилея)**

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета  $x, y, z$  и  $x', y', z'$ . Пусть система  $x', y', z'$  движется относительно "неподвижной" системы  $x, y, z$  с постоянной скоростью  $V$  вдоль оси  $x$  (см. рис.). Выразим координаты некоторой материальной точки  $M$  в системе  $x, y, z$  через её координаты в системе  $x', y', z'$  (см. рис.):



$$\begin{cases} x = x' + vt, \\ y = y', \\ z = z'. \end{cases} \quad (1)$$

Система уравнений (1) носит название преобразование координат Галилея. Галилей считал очевидным, что время в обеих системах течет одинаково:

$$t = t'.$$

Продифференцируем первое уравнение из преобразований Галилея по времени:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(x' + vt)}{dt} = \frac{dx'}{dt} + V.$$

или

$$v = v' + V, \quad (2)$$

где  $v = \frac{dx}{dt}$  и  $v' = \frac{dx'}{dt}$  - скорости точки  $M$  в системах  $x, y, z$  и  $x', y', z'$  соответственно. Уравнение (2) носит название классический закон сложения скоростей.

Продифференцируем уравнение (2) по времени:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv'}{dt},$$

или

$$a = a', \quad (3)$$

где  $a$  и  $a'$  - ускорения точки  $M$  в системах  $x, y, z$  и  $x', y', z'$  соответственно (напомним, что  $V = \text{const}$ ).

В классической механике в качестве постулата принималось постоянство массы тел во всех системах отсчета, т.е.  $m = m'$ . Помня об этом, умножим обе части уравнения (3) на величину массы материальной точки  $M$ :

$$ma = m'a',$$

или

$$F = F', \quad (4)$$

где  $F$  и  $F'$  - значения сил, действующих на точку  $M$  в системах  $x, y, z$  и  $x', y', z'$  соответственно.

Из уравнений (3) и (4) следует, что значения сил и ускорений одинаковы в обеих системах отсчета. Это означает, что второй закон Ньютона выполняется для обеих инерциальных систем. Это обстоятельство дало возможность Галилею сформулировать классический принцип относительности (его еще называют принципом относительности Галилея): «Законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета». Отсюда следует другая формулировка: «Никакими механическими опытами, проводящимися в инерциальной системе отсчета, невозможно обнаружить движение этой системы».

Классический принцип относительности справедлив только при скоростях, много меньших скорости света. Это же ограничение относится к преобразованиям координат Галилея (система (1)) и классическому закону сложения скоростей (уравнение (2)).

### 1.8.2. Постулаты специальной теории относительности

Основы специальной теории относительности были разработаны А. Эйнштейном и опубликованы в 1905 году в статье «К электродинамике движущихся сред». Специальная теория относительности базируется на двух постулатах.

Первый постулат является обобщением принципа относительности Галилея на все физические явления. Одна из формулировок: *все физические явления протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета; все законы природы и уравнения, их описывающие, не меняются при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую*. Отсюда вторая формулировка: *никакими экспериментами в принципе невозможно обнаружить движение инерциальной системы отсчета*.

Второй постулат гласит, что *скорость света в вакууме не зависит от движения источника и приемника и во всех инерциальных системах*

*одинакова.* Таким образом, скорость света в вакууме ( $c \approx 3 \cdot 10^8$  м/с) занимает особое место в природе. В отличие от других скоростей, которые могут изменяться при переходе из одной системы отсчета в другую, скорость света в вакууме остается неизменной (инвариантной) при таком переходе.

### 1.8.3. Преобразования Лоренца

Как отмечалось в п. 1.8.1., преобразования координат Галилея справедливы только при малых скоростях (много меньше скорости света). Преобразования Лоренца заменяют преобразования Галилея при скоростях, сравнимых со скоростью света. В случае, если "подвижная" система  $x', y', z'$  движется относительно "неподвижной"  $x, y, z$  со скоростью  $v$  вдоль оси  $x$  (см. рис. в п. 1.8.1.), преобразования Лоренца имеют вид

$$\begin{cases} x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}. \end{cases} \quad (1)$$

Сравните преобразования Лоренца с преобразованиями Галилея (система уравнений (1) в п. 1.8.1). Во-первых, добавилось четвертое уравнение – преобразование времени! Таким образом, согласно преобразованиям Лоренца, время течет по-разному в разных системах отсчета. Во-вторых, в формуле для преобразования координат появился знаменатель, которого не было в преобразованиях Галилея. Напомним, что движение системы  $x', y', z'$  относительно системы  $x, y, z$  происходит вдоль оси  $x$ , поэтому координаты  $y$  и  $z$  одинаковы в обеих системах. Наконец, обратите внимание, что в формулу для преобразования времени входит пространственная координата. Таким образом, нельзя говорить о независимых друг от друга пространстве и времени, как это было в классической механике. Пространство и время неразрывно связаны друг с другом в единое пространство-время.

Очевидно, что при  $v \ll c$ , то преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея. Это означает, что теория относительности не отвергает законы классической механики, но устанавливает границы их применимости.

Из преобразований Лоренца следует, что при  $V \geq c$  подкоренные выражения становятся отрицательными или равными нулю. Формулы преобразований при этом теряют физический смысл. Это соответствует тому факту, что скорость света в вакууме является *предельной* для материальных тел.

#### 1.8.4. Следствия из преобразований Лоренца

Из преобразований Лоренца следуют важные следствия. Рассмотрим их.

Следствие 1. Релятивистский закон сложения скоростей.

Получим релятивистский закон сложения скоростей из преобразований Лоренца. Очевидно, что  $v_x = dx/dt$  и  $v'_x = dx'/dt'$ . Выразим величины  $dx$  и  $dt$  из преобразований Лоренца (первое и четвертое уравнения соответственно):

$$dx = (dx' + Vdt')/\sqrt{1 - V^2/c^2}; \quad dt = (dt' + \frac{V}{c^2}dx')/\sqrt{1 - V^2/c^2}.$$

откуда

$$v_x = \frac{dx' + Vdt'}{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}.$$

Поделив числитель и знаменатель на  $dt'$ , получим релятивистский закон сложения скоростей:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2}v'_x}. \quad (2)$$

Следствие 2. Сокращение длины движущихся тел.

Пусть в системе  $x', y', z'$  покоится стержень, расположенный вдоль оси  $x$ . Измерим его длину в системе  $x, y, z$ , относительно которой стержень движется. Для этого необходимо засечь координаты  $x_2$  и  $x_1$  концов стержня в один и тот же момент времени. При этом наблюдатель отметит уменьшение длины стержня (сокращение длины)

$$L = L_0 \sqrt{1 - (V/c)^2},$$

где  $L_0 = x'_2 - x'_1$  - так называемая собственная длина стержня, т.е. его длина в системе, относительно которой он покоится. Очевидно, что  $L \leq L_0$ , то есть собственная длина стержня – самая большая.

Доказательство:

$$L_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{(x_2 - Vt)}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} - \frac{(x_1 - Vt)}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} = \frac{L}{\sqrt{1 - (V/c)^2}},$$

где  $L = x_2 - x_1$ .

Следствие 3. Замедление времени.

Пусть в системе  $x', y', z'$  произошли два последовательных события в одной и той же точке пространства. Промежуток времени между ними  $\Delta t_0 = t'_2 - t'_1$ .

Наблюдатель в системе  $x, y, z$  обнаружит между этими же событиями больший промежуток времени (см. четвертое уравнение системы (1)):

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}},$$

или

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (V/c)^2}},$$

где  $\Delta t_0 = t'_2 - t'_1$  - так называемое собственное время, т.е. время, измеренное по часам, движущимся вместе с событием. Таким образом, течение времени в движущейся системе замедляется, то есть собственное время – самое короткое.

Замедляют свой ход не только часы, но и все физические процессы, в том числе и химические реакции. Жизнь – комплекс химических реакций, поэтому старение живых организмов при движении тоже замедляется.

Замедление времени в движущихся системах отсчета доказано экспериментально. Одно из доказательств – наблюдение в составе космических лучей одного из видов элементарных частиц - мюонов. Мюоны – нестабильные короткоживущие частицы. Время жизни неподвижного мюона порядка  $2 \cdot 10^{-6}$  с. За это время мюон, даже двигаясь со скоростью, близкой к скорости света, пройдет путь всего порядка 600 м. Образуются мюоны в верхних слоях атмосферы на высоте 20 – 30 км от поверхности Земли. Казалось бы, за время своей жизни они не должны достигать земной поверхности. В действительности их обнаруживают даже в глубоких шахтах, в глубинах океана, и т.д. Объясняется этот факт тем, что время жизни мюона с точки зрения наблюдателя на поверхности Земли в результате релятивистского эффекта оказывается гораздо большим его «собственного» времени жизни, которое, конечно, остается равным  $2 \cdot 10^{-6}$  с.

В 1971 г. были проведены прямые эксперименты по сравнению показаний двух атомных часов, из которых одни оставались неподвижными в лаборатории, а другие точно такие же совершили облет вокруг Земли на реактивном самолете. Точность таких часов порядка 0,1 нс. Часы, побывавшие в полете, отстали от покоившихся на  $(203 \pm 10)$  нс. В соответствии с теоретическими предсказаниями теории относительности, отставание должно было составить  $(184 \pm 23)$  нс. Как видим, результаты эксперимента совпали с теоретическим предсказанием в пределах погрешности.

### Основной закон релятивистской динамики

В специальной теории относительности сохраняется запись основного закона динамики в виде

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

где  $\vec{F}$  - сила, действующая на частицу. Но это уравнение лишь по виду совпадает с записью второго закона Ньютона, приведенной в п. 1.2.2. В специальной теории относительности релятивистский импульс определяется формулой:

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}},$$

где  $m_0$  – так называемая масса покоя частицы (масса неподвижной частицы). Величину

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

называют релятивистской массой частицы. Как видно из этой формулы, релятивистская масса частицы увеличивается с ростом ее скорости, поэтому она будет различной в различных инерциальных системах отсчета. В отличие от релятивистской, масса покоя частицы – величина *инвариантная*, т.е. одинаковая во всех инерциальных системах отсчета.

Отметим, что в специальной теории относительности сила  $\vec{F}$  - величина неинвариантная, в разных системах отсчета ее величина и направление будут различны.

Масса и импульс растут особенно быстро при скорости тела, близкой к скорости света. При малых скоростях  $v \ll c$  массу тела можно считать практически постоянной. Даже при скорости тела, равной половине

скорости света в вакууме, рост массы составляет всего 13 %. Однако при  $v \rightarrow c$  масса тела растет бесконечно. Такие скорости реально встречаются пока только в ускорителях элементарных частиц, которые проектируют именно с учетом зависимости массы ускоряемой частицы от скорости. Если эту зависимость не учитывать, то по мере роста скорости частицы не только не будут ускоряться, но, наоборот, начнут терять свою скорость. Таким образом, зависимость релятивистской массы от скорости не только подтверждена экспериментально, но и используется в практике проектирования и строительства ускорителей заряженных частиц.

### Взаимосвязь массы и энергии

Рассмотрим частицу, движущуюся под действием постоянной силы  $\vec{F}$ . Для простоты будем считать, что направление силы совпадает с направлением скорости частицы. Сила  $\vec{F}$  совершает работу над частицей. Результатом работы в классической механике является рост кинетической энергии частицы (см. п. 1.3.4). Фактически рост кинетической энергии означает рост скорости частицы, так как масса в классической физике считается величиной постоянной. Но, согласно положениям специальной теории относительности, скорость тела не может расти бесконечно: она ограничена величиной скорости света в вакууме. Таким образом, при  $v \rightarrow c$  скорость тела перестает расти. Что же является результатом работы силы в этом случае? При больших скоростях растет масса тела. Если по-прежнему считать, что по закону сохранения энергии работа силы равна приращению энергии частицы, то мы приходим к выводу, что рост массы частицы эквивалентен росту ее энергии. Иными словами, масса и энергия должны быть эквивалентны. Установим взаимосвязь массы и энергии.

Воспользуемся для этого формулой для зависимости массы частицы от скорости

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат и запишем его в виде

$$m^2 c^2 - m^2 v^2 = m_0^2 c^2$$

Найдем дифференциал этого выражения, помня, что  $m^2 v^2 = p^2$ , а  $m_0$  и  $c$  - постоянные величины:

$$c^2 2m dm - 2p dp = 0,$$

или

$$c^2 dm = v dp .$$

Подставив выражение для скорости (см. п. 1.1.1)  $v = dr/dt$ , где  $dr$  - элементарное перемещение частицы, получим

$$c^2 dm = \frac{dp}{dt} dr ,$$

или

$$c^2 dm = F dr ,$$

где  $F = dp/dt$  - сила, действующая на частицу,  $F dr = dA$  - элементарная работа силы  $F$ .

Итак, если считать, как и в классической механике, что работа силы равна приращению энергии частицы  $dA = dE$ , получаем

$$dE = c^2 dm = d(mc^2) ,$$

или

$$E = mc^2 . \tag{1}$$

Формула (1) выражает один из фундаментальных законов природы – взаимосвязь массы  $m$  и полной энергии  $E$  частицы.

Соответственно величину  $E_0 = m_0 c^2$  называют энергией покоя частицы.

Кинетическая энергия частицы в релятивистском случае равна разности полной энергии и энергии покоя:

$$E_k = E - E_0 .$$

Покажем, что при малых скоростях эта формула совпадает с обычной формулой классической механики  $E_k = mv^2/2$ :

$$E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \approx m_0 c^2 \left( 1 + \frac{v^2}{2c^2} - 1 \right) = \frac{m_0 v^2}{2} .$$

Итак, масса и энергия являются *эквивалентными* физическими величинами и могут превращаться друг в друга. Это важнейшее следствие теории относительности получило подтверждение в ядерной физике, где им широко пользуются при подсчете баланса энергии в ядерных реакциях и определении массы частиц (нейтронов, протонов).

## Границы применимости классической механики

Законы классической механики, в частности законы Ньютона, имеют границы применимости, за пределами которых они не выполняются. На рис. условно изображены области применимости различных механических теорий. По осям координат отложены следующие величины: по оси ординат – отношение скорости материальной точки к скорости света в вакууме, по оси абсцисс – отношение постоянной Планка  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  к произведению импульса точки  $p$  на характерный размер  $\ell$  той области пространства, в которой ограничено движение точки.

v/c 1	Механика специальной теории относительности	Релятивистская квантовая механика
	Классическая механика	Нерелятивистская квантовая механика
		1 $\frac{\hbar}{p\ell}$

Разумеется, границы между областями условны и нечетки. Как видно из рис., классическая механика справедлива при скоростях движения, много меньших скорости света в вакууме  $v \ll c$ , и в сравнительно больших объемах (много больше размеров атома). Например, электрон в атоме водорода имеет скорость порядка  $2 \cdot 10^6$  м/с, радиус атома водорода примерно равен  $0,5 \cdot 10^{-10}$  м, поэтому

$$\frac{\hbar}{mvr} = \frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 0,5 \cdot 10^{-10}} = 1.$$

Таким образом, поведение электрона в атоме нельзя описать законами классической механики, в данном случае следует применять квантовую механику. В повседневной жизни мы имеем дело в основном с макроскопическими объектами (размеры много больше атомных) и со скоростями, значительно меньшими скорости света. В этих условиях законы классической механики хорошо выполняются.

Молекулярно-кинетическая теория**Термодинамическая система. Идеальный газ**

Термодинамическая система – это система, состоящая из большого числа частиц. Под частицами далее, если это не оговорено особо, будем понимать молекулы. Чтобы представить, насколько велико число частиц в термодинамической системе, приведем такой пример: в  $1 \text{ см}^3$  воздуха при нормальных условиях содержится примерно  $2,7 \cdot 10^{19}$  молекул! Простейшей термодинамической системой является идеальный газ. Идеальный газ – это газ, молекулы которого представляют собой материальные точки, движущиеся хаотически и сталкивающиеся между собой абсолютно упруго. Кроме упругих столкновений, других взаимодействий между молекулами в идеальном газе нет. Из сказанного ясно, что идеальный газ – это не более чем модель реальной термодинамической системы. Тем не менее многие реальные газы при определенных условиях по своим свойствам приближаются к идеальным. При атмосферном давлении ближе всего к идеальным газам гелий и водород, однако воздух с достаточной точностью также можно считать при атмосферном давлении идеальным газом.

**Параметры состояния. Процессы**

Физические величины, описывающие термодинамическую систему *в целом*, называются макроскопическими параметрами системы, или просто макропараметрами.

Основными макропараметрами термодинамической системы (в том числе идеального газа) являются следующие:

1. Количество вещества (число молей)  $\nu$ . Его можно определить через число частиц в системе  $N$ :

$$\nu = \frac{N}{N_A},$$

где  $N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$  – число Авогадро. Иногда удобнее определять количество вещества через его массу  $m$ :

$$\nu = \frac{m}{\mu},$$

где  $\mu$  – молярная масса.

2. Объем  $V$ .

3. Давление  $P$  – сила, действующая на единицу площади поверхности, ограничивающей систему.

4. Температура  $T$  – величина, характеризующая среднюю кинетическую энергию молекулы (см. 2.1.8).

Не все из макропараметров системы являются независимыми, так как они

могут быть связаны уравнениями состояния (см. 2.1.3 и 2.7.2).

Состояние термодинамической системы, характеризующееся определенным набором макропараметров (давлением, объемом, температурой), называется макросостоянием. Если макропараметры имеют определенные и постоянные во времени значения для любой части системы, то такое макросостояние называют равновесным.

Переход системы из одного макросостояния в другое макросостояние называется термодинамическим процессом. Если такой переход происходит достаточно медленно, то можно сказать, что процесс проходит через последовательность практически равновесных состояний. Такой процесс называют *равновесным* или *квазистатическим*. Равновесный процесс может быть проведен в обратном направлении через ту же последовательность равновесных состояний. По этой причине равновесные процессы называют обратимыми.

Помимо макропараметров, описывающих свойства системы в целом, можно использовать для описания системы параметры *каждой молекулы*, например, указать в данный момент времени координаты и скорости каждой молекулы. Эти величины называются микропараметрами. Если система содержит  $N$  частиц, необходимо указать  $3N$  значений координат  $(x_i, y_i, z_i)$  и  $3N$  значений проекций скорости молекул  $(v_{xi}, v_{yi}, v_{zi})$ , всего  $6N$  значений микропараметров.

Очевидно, что вследствие хаотического движения молекул микропараметры непрерывно меняются, даже если система в целом находится в равновесном состоянии. Таким образом, одному и тому же макросостоянию соответствует громадное количество микросостояний.

## Уравнение состояния идеального газа

Уравнение, связывающее температуру  $T$ , давление  $P$  и объем  $V$  идеального газа, называется уравнением состояния или уравнением Клапейрона-Менделеева

$$PV = \frac{m}{\mu} RT.$$

Здесь  $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$  – универсальная газовая постоянная,  $m$  – масса газа,  $\mu$  – молярная масса в  $\text{кг}/\text{моль}$ . При этом  $\frac{m}{\mu} = \nu$  – количество молей газа.

Температура, входящая в уравнение состояния идеального газа, носит название абсолютной температуры. Единица измерения абсолютной температуры называется кельвин (К) в честь английского физика лорда Кельвина.

Температура по шкале Цельсия  $t$  связана с абсолютной температурой  $T$  следующей зависимостью:  $t = T - 273,15 \text{ }^\circ\text{C}$ .

## Изопроцессы

Термодинамические процессы, в которых один из макропараметров остается постоянным, а остальные меняются, носят общее название изопроцессов. Рассмотрим некоторые из них.

Изотермический процесс – процесс изменения состояния газа при постоянной

температуре. Из уравнения состояния идеального газа (см. 2.1.3) следует, что при постоянной температуре произведение давления на объем данной массы газа остается постоянной величиной

$$PV = \text{const} . \quad (1)$$

На рис. 1 изображена зависимость между давлением и объемом по уравнению (1). Кривая, выражающая зависимость давления газа от его объема, называется изотермой.

Изохорический процесс – процесс изменения состояния газа при постоянном объеме. Из уравнения состояния идеального газа (см. 2.1.3) в этом случае следует, что отношение давления газа к его температуре остается постоянной величиной

$$\frac{P}{T} = \text{const} . \quad (2)$$

На рис. 2 изображена зависимость давления газа от температуры по уравнению (2).

Изобарический процесс – процесс изменения состояния газа при постоянном давлении. Из уравнения состояния идеального газа (см. 2.1.3) в этом случае следует, что отношение объема газа к его температуре остается постоянной величиной

$$\frac{V}{T} = \text{const} . \quad (3)$$

На рис. 3 изображена зависимость объема газа от температуры по уравнению (3).

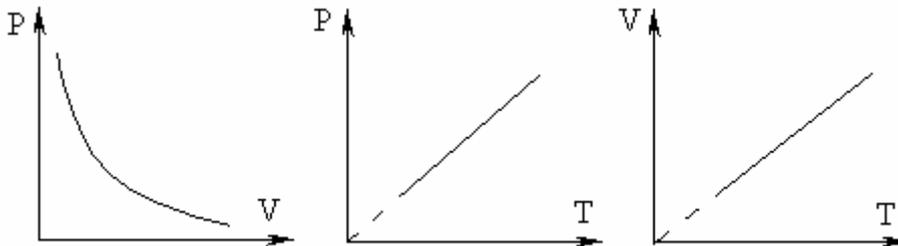


Рис. 1.

Рис. 2.

Рис. 3.

## Молекулярно-кинетическая теория газов

В основу молекулярно-кинетической теории положены следующие положения:

1. Все тела состоят из атомов и молекул.
2. Атомы и молекулы находятся в непрерывном движении. Такое движение носит хаотический, беспорядочный характер и называется тепловым. Тепловое движение существует при любой температуре. При абсолютном нуле оно принимает характер колебаний атомов и молекул около своих положений равновесия.

Одним из экспериментальных подтверждений теплового движения атомов и молекул является так называемое броуновское движение.

Броуновское движение – это беспорядочное движение малых частиц, взвешенных в жидкости или газе, происходящее под действием ударов молекул жидкости или газа. Это движение впервые исследовано в 1827 г. английским ботаником Р. Броуном, который наблюдал в микроскоп движение цветочной пыльцы, взвешенной в воде. Частицы размером приблизительно в 1 мкм совершают неупорядоченные независимые движения, описывая сложные зигзагообразные траектории. Интенсивность броуновского движения не зависит от времени, но возрастает с ростом температуры среды, с уменьшением ее вязкости и размеров частиц, независимо от их химической природы. Причина броуновского движения – тепловое движение молекул среды и отсутствие точной компенсации ударов, испытываемых частицей со стороны окружающих ее молекул.

### Основное уравнение молекулярно-кинетической теории

Согласно молекулярно – кинетической теории давление газа – это результат соударений молекул газа со стенками сосуда. Предположим, что газ идеальный. Пусть атомы газа находятся внутри сосуда с поршнем, способным перемещаться без трения. Вне сосуда – вакуум. О поршень ударяются молекулы, движущиеся с различными скоростями (рис. 1).

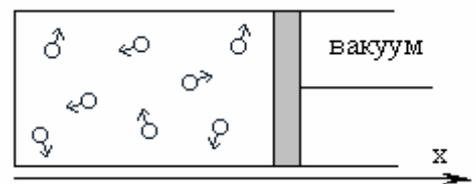


Рис. 1

При упругом столкновении с поршнем закон сохранения импульса в проекции на ось  $x$ , перпендикулярную поверхности поршня (рис. 1), выглядит так:

$$mv_x = -mv_x + \Delta p_{ix} , \quad (1)$$

где  $mv_x$  - проекция импульса молекулы до столкновения с поршнем,  $-mv_x$  - проекция импульса молекулы после упругого столкновения,  $\Delta p_{ix}$  - импульс, полученный поршнем при ударе одной молекулы.

Из уравнения (1) следует, что

$$\Delta p_{ix} = 2mv_x . \quad (2)$$

За время  $\Delta t$  поршня достигнут только те молекулы, которые, двигаясь по направлению к поршню, находились от него на расстоянии не более, чем  $v_x \Delta t$ . Общее число таких молекул, учитывая, что в среднем только половина молекул движется к поршню, а другая половина – от поршня, равно

$$N = \frac{1}{2} n v_x \Delta t S , \quad (3)$$

где  $n$  – концентрация молекул,  $S$  – площадь поршня.

Суммарный импульс, полученный поршнем в результате ударов  $N$  молекул, с учетом (2) и (3), равен

$$\Delta p_x = \Delta p_{ix} N = n m v_x^2 \Delta t S ,$$

откуда давление (сила, действующая на единицу площади поверхности поршня) равно

$$P = \frac{F}{S} = \frac{1}{S} \left( \frac{\Delta p_x}{\Delta t} \right) = nmv_x^2. \quad (4)$$

(Напомним, что по второму закону Ньютона (1.2.2) сила равна изменению Умножим обе части уравнения (6) на объем одного моля  $V_\mu$ :

$$PV_\mu = \frac{2}{3} nV_\mu \langle E_k \rangle,$$

и сравним с уравнением Клапейрона-Менделеева для одного моля:

$$PV_\mu = RT.$$

Так как левые части равенств одинаковы, то должны быть равны и правые, то есть

$$\frac{2}{3} nV_\mu \langle E_k \rangle = RT,$$

откуда

$$\langle E_k \rangle = \frac{3}{2} kT \quad (7)$$

Здесь  $k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – постоянная Больцмана,  $N_A = n \cdot V_\mu$  – число молекул в одном моле, т.е. число Авогадро.

Из формулы (7) следует, что средняя энергия движения молекул идеального газа зависит только от абсолютной температуры.

Комбинируя (6) и (7), получим еще одно выражение для основного уравнения молекулярно-кинетической теории:

$$P = nkT. \quad (8)$$

## Распределение энергии молекул по степеням свободы

Числом степеней свободы механической системы называется число независимых координат, определяющих ее положение и конфигурацию в пространстве. Молекула идеального газа (материальная точка) в пространстве декартовых координат  $x, y, z$  имеет три степени свободы поступательного движения ( $i = 3$ ), так как все три координаты независимы (рис. 1).

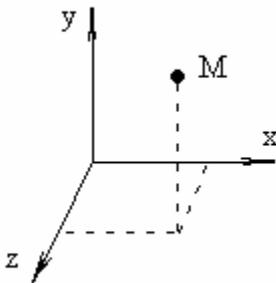


Рис. 1.

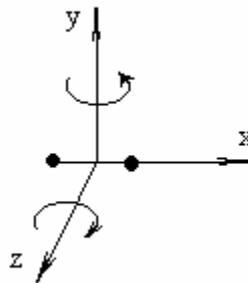


Рис. 2.

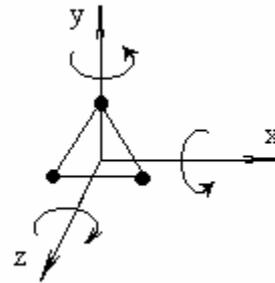


Рис. 3.

Двухатомная молекула (две точки на неизменном расстоянии друг от друга) имеет пять степеней свободы ( $i = 5$ ): три поступательных и две вращательных вокруг осей  $y$  и  $z$  (рис. 2). Говорить о вращении изображенной на рис.2 двухатомной молекулы вокруг оси  $x$  бессмысленно, так как линия не имеет толщины, следовательно, и момента инерции относительно оси  $x$ .

Трехатомная молекула (рис. 3) имеет три поступательных и три вращательных степени свободы, т.е. всего шесть степеней свободы ( $i = 6$ ). Столько же степеней свободы ( $i = 6$ ) имеет, очевидно, и любая многоатомная молекула с числом атомов больше трех.

Рассмотренные нами выше двухатомная, трехатомная и многоатомные молекулы считаются жестким телом, то есть отсутствует перемещение атомов в молекуле друг относительно друга.

Молекулы идеального газа представляют собой точки, следовательно, имеют три поступательных степени свободы. В соответствии с формулой (7) п. 2.1.6., на каждую степень свободы должна приходиться в среднем одинаковая энергия, равная  $\frac{1}{2}kT$ . Если молекула имеет число степеней свободы  $i > 3$  (двух-, трех- или многоатомная молекула), то в общем случае средняя энергия одной молекулы определяется зависимостью

$$\langle E \rangle = \frac{i}{2}kT, \quad (1)$$

где  $k$  - постоянная Больцмана,  $T$  - температура.

В разделе 2.1.7. рассматривались только молекулы с «жесткой» связью между атомами. Такие молекулы движутся как единое целое, атомы в них не движутся друг относительно друга. Если атомы в молекулах связаны не жесткой, а упругой связью, то они могут совершать колебательное движение. Такая молекула будет иметь, кроме поступательных и вращательных степеней свободы, еще и колебательные. Каждая колебательная степень свободы связана с энергией, вдвое большей, чем поступательная или вращательная. Это связано с наличием в колебательном движении как кинетической, так и потенциальной энергии, тогда как поступательное или вращательное движения связаны только с кинетической энергией. Поэтому в соответствии с формулой (1) на каждую колебательную степень свободы приходится в среднем энергия  $\frac{2}{2}kT = kT$ .

В общем случае

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращат}} + 2i_{\text{колеб}}$$

Следует иметь в виду, что число степеней свободы молекул зависит от температуры, и не является постоянным даже для одного и того же газа. При низких температурах наблюдается только поступательное движение молекул, при котором  $i_{\text{пост}} = 3$ . При более высоких температурах наряду с поступательным движением наблюдается вращательное. И, наконец, при еще более высоких температурах начинаются колебания атомов в молекулах.

Основные закономерности термодинамики**Внутренняя энергия идеального газа**

Энергия теплового движения одного моля идеального газа (внутренняя энергия) в соответствии с п. 2.1.6 равна

$$U_{\mu} = \frac{i}{2} k T N_A = \frac{i}{2} R T.$$

Для произвольного числа молей  $\nu$  идеального газа внутренняя энергия будет равна

$$U = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R T.$$

Таким образом, внутренняя энергия идеального газа определяется его температурой. Из уравнения Клапейрона-Менделеева следует, что

$$\frac{m}{\mu} R T = P V.$$

Подставляя это значение в уравнение для внутренней энергии, имеем

$$U = \frac{1}{2} P V.$$

Пример. Найти внутреннюю энергию 1,5 кг азота при температуре 300 К. Молярная масса азота 0,028 кг/моль.

Молекула азота состоит из двух атомов, поэтому число степеней свободы  $i = 5$ . Подставляя все данные в формулу для внутренней энергии, находим  $U = 338,9$  кДж.

**Работа расширения газа**

Рассмотрим идеальный газ, находящийся в цилиндре под поршнем (рис. 1). Под действием внешней силы  $F$  поршень переместился на расстояние  $dx$ , сжимая находящийся в сосуде газ. Внешней силе  $F$  противодействует сила давления газа на поршень  $F' = PS$ . Работа, затраченная на перемещение поршня, равна  $dA = PSdx$ . Но  $Sdx = -dV$  (при сжатии газа объем уменьшается), откуда  $dA = -PdV$ . Наоборот, при расширении газа, то есть при увеличении его объема на величину  $dV$ , газ совершает работу против внешних сил, равную

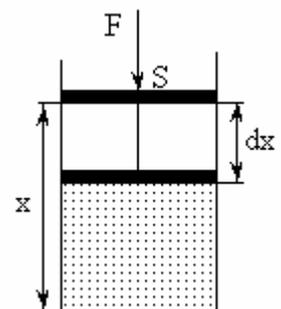


Рис. 1.

$$dA = PdV.$$

При конечном перемещении поршня, когда объем меняется от значения  $V_1$  до

значения  $V_2$ , работа равна сумме элементарных работ, то есть интегралу

$$A = \int_{V_1}^{V_2} dA = \int_{V_1}^{V_2} P(V)dV,$$

который графически выражается площадью под кривой, описывающей функциональную зависимость давления газа от объема  $P(V)$  (например, заштрихованная площадь для процесса 1A2 на рис. 2, работа для процесса 1B2 будет больше, чем – для процесса 1A2).

Как следует из сказанного выше, работа, совершенная системой над внешними телами или внешними силами над ней, зависит от последовательности состояний, которые проходит система при переходе от состояния 1 к состоянию 2. Таким образом, работа не является функцией состояния, как, например, внутренняя энергия, которая имеет вполне определенное значение в каждом конкретном состоянии системы.

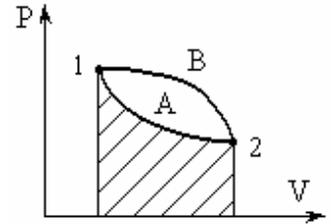


Рис. 2.

## Первое начало термодинамики

Внутреннюю энергию термодинамической системы, в частности, идеального газа, можно изменить двумя различными путями. Первый путь заключается в том, чтобы совершить работу над системой, тогда, по закону сохранения энергии, эта работа пойдет на приращение внутренней энергии системы. Например, при быстром сжатии газ нагревается, то есть увеличивается его внутренняя энергия. В дизельных двигателях воспламенение рабочей смеси происходит именно от сжатия. Заметим, что в данном случае увеличивается энергия сразу всех молекул.

Второй путь заключается в увеличении энергии отдельных молекул. Например, так нагревается воздух в комнате от горячей батареи: молекулы воздуха, получая при непосредственном контакте с горячей батареей энергию, отлетают от нее с большей скоростью, чем имели до контакта с батареей. Такой способ изменения внутренней энергии термодинамической системы называется теплообменом, а сообщенная при этом системе энергия исторически называется количеством теплоты (теплотой). Измеряется теплота, как и любая энергия, в джоулях (Дж). Данный способ изменения внутренней энергии системы связан с изменением ее энтропии (см. 2.4.4).

Таким образом, в общем случае для элементарного изменения внутренней энергии системы можно записать

$$dU = dQ + dA', \quad (1)$$

где  $dQ$  – элементарное количество теплоты, переданное системе,  $dA'$  – элементарная работа внешних сил над системой. Формула (1) выражает первое начало термодинамики.

Очевидно, что  $dA' = -dA$ , где  $dA$  – работа самой системы над внешними

талами. В таком случае первое начало термодинамики примет вид:

$$dQ = dU + dA, \quad (2)$$

то есть количество теплоты, подведенное к системе, идет на увеличение ее внутренней энергии и на работу против внешних сил.

Первое начало термодинамики есть по сути закон сохранения энергии применительно к термодинамическим процессам.

Уравнения (1) и (2) выражают первое начало термодинамики в общем случае. Применительно к различным изопроцессам первое начало примет следующий вид:

1. для изохорического процесса  $V = \text{const}$  :

$$dQ = dU,$$

так как при постоянном объеме система не совершает работы;

2. для изобарического процесса  $P = \text{const}$  :

$$dQ = dU + dA,$$

то есть вид первого начала совпадает с уравнением (2).

3. для изотермического процесса  $T = \text{const}$  :

$$dQ = dA,$$

так как при постоянной температуре изменения внутренней энергии не происходит;

Из сказанного ясно, что изотермический процесс самый выгодный для совершения работы за счет подведенного к системе тепла, а изохорический – самый выгодный для нагревания системы, то есть увеличения внутренней энергии.

## Теплоемкость

По определению, теплоемкостью термодинамической системы, в частности, идеального газа, называется величина

$$C = \frac{dQ}{dT}, \quad (1)$$

то есть количество теплоты, необходимое для увеличения температуры системы на один кельвин. Формула (1) определяет так называемую полную теплоемкость системы. Очевидно, что она не является константой для данного вещества, а зависит, например, от его массы. Это неудобно, поэтому в термодинамических расчетах используются два вида теплоемкостей, лишенных этого недостатка:

удельная теплоемкость  $c$ , то есть теплоемкость единицы массы;

молярная теплоемкость  $C$ , то есть теплоемкость одного моля.

Молярная теплоемкость связана с удельной выражением

$$C = \mu c.$$

Единицы измерения теплоемкостей: полной – Дж/К; удельной – Дж/(кг·К); молярной – Дж/(моль·К).

Казалось бы, удельная и молярная теплоемкости должны иметь определенное значение для данного вещества. Действительно, для жидкостей и твердых тел в справочниках можно найти соответствующие величины теплоемкостей. Но для газов такие данные отсутствуют. Почему? Дело в том, что количество теплоты, которое нужно затратить, чтобы нагреть 1 моль какого либо газа на один кельвин, то есть теплоемкость газа, зависит от того, в каком процессе происходит это нагревание. Иными словами, теплоемкость газов различна в различных процессах. Зависимость теплоемкости газа от вида процесса рассмотрена в следующем разделе.

### **Зависимость теплоемкости газа от вида процесса**

Рассмотрим зависимость молярной теплоемкости газа от вида процесса.

1. Изохорический процесс (нагревание происходит при постоянном объеме). В этом случае по первому началу термодинамики

$$dQ = dU .$$

Подставляя значение изменения внутренней энергии одного моля

$$dU_{\mu} = \frac{i}{2} R dT$$

(см. 2.2.1) в формулу для теплоемкости (см. 2.2.4), получим величину молярной теплоемкости газа при постоянном объеме

$$C_v = \frac{dQ}{dT} = \frac{i}{2} R .$$

2. Изобарический процесс (нагревание происходит при постоянном давлении). Согласно первому началу термодинамики

$$dQ = dU + dA$$

или (см. 2.2.1 и 2.2.2)

$$dQ = C_v dT + PdV = C_v dT + R dT .$$

Отсюда найдем молярную теплоемкость при постоянном давлении

$$C_p = \frac{dQ}{dT} = C_v + R .$$

Очевидно, что  $C_p > C_v$ , поскольку при изобарическом процессе сообщенное газу тепло расходуется не только на нагревание, но и на совершение работы.

3. Изотермический процесс (температура системы остается постоянной). Из

определения теплоемкости  $C = dQ/dT$  очевидно, что в изотермическом процессе теплоемкость  $C_T \rightarrow \infty$ , так как  $dT = 0$  (температура не изменяется).

### Классическая теория теплоемкостей

В предыдущем разделе получены формулы, позволяющие для любого газа рассчитать молярную или удельную теплоемкость через число степеней свободы молекул:

$$C_v = \frac{i}{2}R, \quad (1)$$

$$C_p = C_v + R = \frac{i+2}{2}R, \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) выражают теплоемкость на основе классической теории. Согласно этой теории, теплоемкость газа не должна зависеть от температуры. Экспериментально определенные значения теплоемкостей хорошо совпадают с теоретическими по формулам (1) и (2) при не слишком низких и не слишком высоких температурах. При достаточно низких температурах экспериментальные значения теплоемкостей ниже теоретических по классической теории, а при достаточно высоких выше теоретических.

### Адиабатический процесс

Адиабатический процесс – это процесс, протекающий без теплообмена с окружающей средой. Иначе его называют изоэнтропийным, так как в этом процессе энтропия термодинамической системы (см. 2.4.4) остается постоянной величиной. Таким образом, адиабатический процесс можно отнести к изопроцессам. Практически осуществить процесс без теплообмена с окружающей средой невозможно. Близким к адиабатическому будет процесс, протекающий так быстро, что за время его протекания теплообмен с окружающей средой практически не успевает произойти.

Первое начало термодинамики для адиабатического процесса имеет вид:

$$dA = -dU, \quad (1)$$

так как  $dQ$  для адиабатического процесса по определению равно нулю. В этом процессе система совершает работу за счет уменьшения своей внутренней энергии.

Уравнение (1) позволяет получить уравнение адиабатического процесса в переменных  $P, V, T$ . Для простоты рассмотрим один моль газа  $\nu = 1$ . Так как  $dA = PdV$  (см. 2.2.2), а  $dU_\mu = \frac{i}{2}RdT = C_v dT$  (см. 2.2.1 и 2.2.5), то уравнение (1) примет вид:

$$PdV = -C_v dT, \quad (2)$$

где  $C_v$  – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме. Оставим в уравнении две независимые переменные, выразив, например, давление из уравнения состояния одного моля идеального газа

$$P = \frac{RT}{V}.$$

Тогда уравнение (2) примет вид:

$$R \frac{dV}{V} = -C_v \frac{dT}{T}.$$

Интегрируя обе части, получим

$$\frac{R}{C_v} \ln V = -\ln T + \text{const}.$$

Потенцируем полученное выражение

$$TV^{R/C_v} = \text{const}. \quad (3)$$

Поскольку  $R = C_p - C_v$  (см. 2.2.5), то уравнение (3) примет вид:

$$TV^{\frac{C_p}{C_v} - 1} = \text{const} \quad \text{или} \quad TV^{\gamma - 1} = \text{const}. \quad (4)$$

Величину  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  называют показателем адиабаты.

Выразив температуру газа через давление и объем из уравнения состояния одного моля идеального газа

$$T = \frac{PV}{R}$$

и подставив в уравнение (4), получим уравнение адиабатического процесса в переменных  $P, V$ , как его чаще всего записывают

$$PV^\gamma = \text{const}.$$

На рис. 1 изображен процесс адиабатического расширения газа от объема  $V_1$  до объема  $V_2$  (линия 1-2). Для сравнения на том же рис. изображен процесс изотермического расширения газа при том же изменении объема (линия 1-2'). Так как величина  $\gamma$  всегда больше 1, то адиабата (линия, изображающая адиабатический процесс) всегда будет на графике круче изотермы, то есть при одном и том же увеличении объема конечное давление в адиабатическом процессе будет меньше, чем в изотермическом (рис. 1).

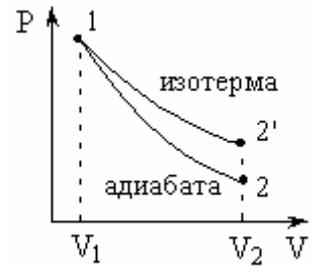


Рис. 1.

На рис. 2 изображен тот же процесс адиабатического расширения в координатах  $T, V$  (см. уравнение (4)). Видим, что при адиабатическом расширении газ охлаждается, и наоборот при адиабатическом сжатии нагревается.

Из определения теплоемкости  $C = dQ/dT$  очевидно, что в адиабатическом процессе теплоемкость равна нулю, так как  $dQ = 0$  (процесс происходит без теплообмена).

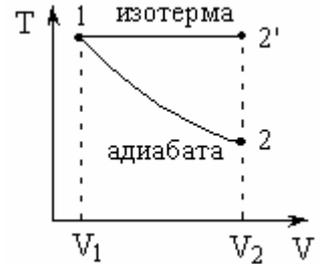


Рис. 2.

### Политропический процесс

Рассмотренные ранее изопроцессы (см. 2.1.4 и 2.2.7) – изотермический, изобарический, изохорический и изоэнтروпийный (адиабатический) – представляют собой частные случаи так называемого *политропического процесса*. Политропическим называется процесс при постоянной теплоемкости:  $C = \text{const}$ . Выведем уравнение политропического процесса на основании первого начала термодинамики:

$$dQ = dU + dA, \quad (1)$$

где  $dQ = \nu C dT$  - количество тепла, полученного системой в процессе,  $dU = \nu C_v dT$  - изменение внутренней энергии системы,  $dA = PdV$  - работа системы над внешними телами,  $\nu$  - количество молей. Выражая давление из уравнения состояния через температуру и объем  $P = \frac{\nu RT}{V}$  и подставляя соответствующие величины в уравнение (1), получим:

$$C \cdot dT = C_v \cdot dT + RT \frac{dV}{V},$$

или

$$(C - C_v) \frac{dT}{T} = R \frac{dV}{V}.$$

Интегрирование обеих частей этого уравнения дает следующий результат:

$$\ln T = \frac{R}{C - C_v} \ln V + \text{const}.$$

Потенцируя, получим

$$T = \text{const} \cdot V^{\frac{R}{C - C_v}}$$

Заменяя в полученном выражении температуру из уравнения состояния  $T = \frac{PV}{\nu R}$ , получим

$$PV^{1 - \frac{R}{C - C_v}} = \text{const}.$$

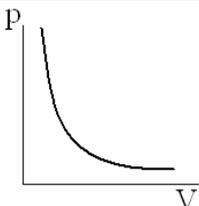
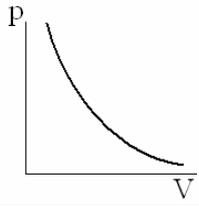
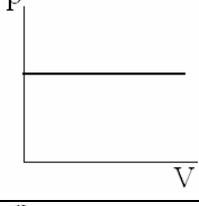
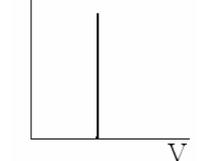
Напомним, что  $R = C_p - C_v$ . Поэтому окончательно получаем уравнение политропического процесса в переменных  $P, V$ :

$$pV^{\frac{C - C_p}{C - C_v}} = \text{const}.$$

Введем обозначение  $n = \frac{C - C_p}{C - C_v}$ . Тогда уравнение политропического процесса примет вид

$$PV^n = \text{const}.$$

Таблица наглядно иллюстрирует принадлежность рассмотренных нами изо процессов к одному общему процессу – политропическому.

Наименование процесса	Молярная теплоемкость	Показатель n	Уравнение	График
Изоэнтропийный (адиабатический)	$C_s = 0$	$n = \gamma$	$PV^\gamma = \text{const}$	
Изотермический	$C_T = \infty$	$n = 1$	$PV = \text{const}$	
Изобарический	$C_p = \frac{i+2}{2}R$	$n = 0$	$P = \text{const}$	
Изохорический	$C_v = \frac{i}{2}R$	$n = \infty$	$V = \text{const}$	

**Второе начало термодинамики****Циклические процессы**

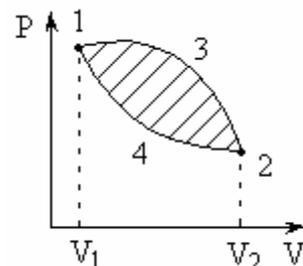
Циклическим называется процесс, в результате которого система приходит в исходное состояние. Графически такой процесс изображается замкнутой кривой. Направление, в котором протекает циклический процесс, может быть различным. На рис. изображен процесс, протекающий по часовой стрелке. Возможен и обратный процесс: 1-4-2-3-1. Рассмотрим, какая работа совершается в циклическом процессе. Элементарная работа при изменении объема газа вычисляется по формуле (см. 2.2.2)

$$dA = PdV. \quad (1)$$

Работа газа в процессе расширения от объема  $V_1$  до объема  $V_2$  найдется интегрированием выражения (1) по кривой 1-3-2:

$$A_{1-3-2} = \int_{V_1}^{V_2} P(V)dV. \quad (2)$$

Графически это интеграл равен площади под кривой 1-3-2. Работа при сжатии газа от объема  $V_2$  до объема  $V_1$  найдется интегрированием выражения (1) по кривой 2-4-1. Эта работа отрицательна. Результирующая работа в циклическом процессе 1-3-2-4-1 равна сумме работ расширения и сжатия газа с учетом знака. Графически результирующая работа равна разности площадей под кривой 1-3-2 и под кривой 2-4-1, то есть площади фигуры, ограниченной кривой цикла. Для процесса, изображенного на рисунке, работа положительна, то есть система совершает работу над внешними силами. По такому циклу работают тепловые машины. Если процесс протекает против часовой стрелки, то работа расширения меньше работы сжатия и результирующая работа отрицательна. Это означает, что над газом совершают работу внешние силы, по такому циклу работают холодильные машины.



### 2.4.2. Цикл Карно

Среди множества возможных циклических процессов (циклов) особое место занимает цикл, носящий название цикл Карно (по имени французского ученого С. Карно). Цикл Карно состоит из двух изотерм и двух адиабат (рис. 1). По своему назначению система, совершающая циклический процесс, является тепловой машиной, которая совершает механическую работу за счет тепла (рис. 2).

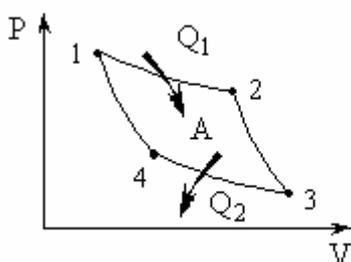


Рис. 1.

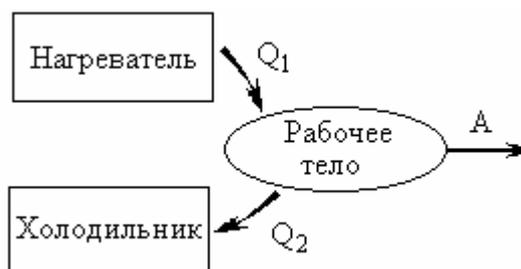


Рис. 2.

Любая тепловая машина включает три необходимых элемента: нагреватель, холодильник и рабочее тело (газ, пар), которое и совершает механическую работу. Работа машины по циклу Карно происходит следующим образом. Сначала рабочее тело получает от нагревателя некоторое количество тепла  $Q_1$  в изотермическом процессе 1-2 при температуре нагревателя  $T_1$ . Согласно первому началу термодинамики, в изотермическом процессе все тепло идет на совершение работы при расширении рабочего тела:  $Q_1 = A_{1-2}$ . Затем рабочее тело изолируют от нагревателя и оно дополнительно адиабатически расширяется (процесс 2-3). При этом совершается работа за счет убыли внутренней энергии рабочего тела:  $A_{2-3} = -(U_3 - U_2)$ . Таким образом, рабочее тело охлаждается от температуры  $T_1$  до температуры  $T_2$ , равной температуре холодильника. Затем при температуре  $T_2$  происходит изотермическое сжатие рабочего тела (процесс 3-4), при этом над ним совершается работа  $A_{3-4}$  внешними силами, а холодильнику отдается количество теплоты  $Q_2 = A_{3-4}$ . Затем рабочее тело изолируют от холодильника и адиабатически сжимают до первоначального объема (процесс 4-1). При этом работа внешних сил по сжатию рабочего тела идет на увеличение его внутренней энергии:  $A_{4-1} = U_1 - U_4$ .

Площадь, ограниченная кривой 1-2-3-4-1, численно равна

работе, совершенной в одном цикле. Эффективность тепловой машины характеризуется коэффициентом полезного действия (кпд), который по определению равен отношению полезной работы к количеству теплоты, полученному от нагревателя:

$$\eta = \frac{A}{Q_1}.$$

Так как часть тепла  $Q_2$  система отдает холодильнику в процессе 3-4, то по закону сохранения энергии

$$A = Q_1 - Q_2.$$

Тогда для кпд можно записать формулу

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Очевидно, что величина кпд не может быть больше единицы.

Для цикла Карно кпд выражается очень просто через температуры нагревателя  $T_1$  и холодильника  $T_2$ :

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Эта формула выводится с помощью понятия энтропии, которое рассматривается в разделе 2.4.4.

Тепловая машина, работающая по циклу Карно, имеет максимально возможный кпд при данных температурах нагревателя и холодильника. Любая другая машина, работающая по любому циклу, отличному от цикла Карно, будет менее эффективна.

Пример. Рассмотрим паровую машину. Пусть температура нагретого пара  $T_1 = 100 \text{ }^\circ\text{C} = 373 \text{ K}$ , а отработанный пар выбрасывается в атмосферу при температуре  $T_2 = 293 \text{ K}$ . Отсюда максимально возможный кпд такой машины  $\eta = 0,21 = 21 \%$ .

В современных паровых турбинах используется пар под высоким давлением, температура которого равна примерно  $500 \text{ }^\circ\text{C}$ . Тогда  $T_1 = 773 \text{ K}$ ,  $T_2 = 293 \text{ K}$ , и максимальная величина кпд  $\eta = 0,62 = 62 \%$ . Реальный кпд будет, конечно, меньше.

## Второе начало термодинамики

Второе начало термодинамики определяет направление процессов, происходящих в термодинамических системах. Существует несколько эквивалентных формулировок второго начала термодинамики. Они приводятся ниже.

Формулировка В. Томсона (лорда Кельвина): "Невозможен круговой процесс (цикл), единственным результатом которого было бы производство работы за счет охлаждения нагревателя".

Поясним эту формулировку. Согласно 2.4.2, КПД тепловой машины не может быть больше единицы. Но может ли он равняться единице? Если КПД равен единице, это и означает, что все тепло, взятое у нагревателя, превращается в работу:  $A = Q_1; Q_2 = 0$ . Из формулы КПД цикла Карно видно, что  $\eta = 1$  при температуре холодильника  $T_2 = 0$ , что невозможно в принципе, и поэтому нельзя полностью превратить в тепловой машине тепло, взятое у нагревателя, в работу.

Тепловая машина, которая производила бы механическую работу только за счет отнятия тепловой энергии, запасенной в одном источнике теплоты, называется вечным двигателем второго рода. Если бы удалось создать такой двигатель, он мог бы производить работу, например, за счет тепловой энергии мирового океана, которая составляет примерно  $10^{26}$  Дж. Это количество энергии значительно превышает суммарное потребление энергии за всю историю человечества. Действительно, от океана в принципе можно получить некоторое количество энергии, воспользовавшись тем, что температура поверхностных слоев воды выше, чем глубинных. Но как только температуры сравняются ( $T_1 = T_2$ ), работа двигателя прекратится. Таким образом, вечный двигатель второго рода невозможен.

Заметим, что механическую работу можно полностью превратить в тепло, например, при трении, что и происходит в действительности очень часто.

Формулировка Клаузиуса: "Невозможен такой термодинамический процесс, единственным результатом которого была бы передача тепла от менее нагретого тела к более нагретому".

Подчеркнем, что нельзя передать тепло от холодного тела горячему, если это *единственный* результат процесса, то есть больше никаких изменений в окружающих телах не происходит. Вообще же передача тепла от холодных тел более нагретым возможна. Так работает, например, домашний холодильник: он отбирает тепло от

холодных продуктов и отдает его нагретому окружающему пространству. Но эта передача тепла происходит за счет потребляемой холодильником электрической энергии. Выключите холодильник из сети, и все пойдет согласно формулировке Клаузиуса: холодные продукты начнут нагреваться за счет тепла, получаемого от окружающей среды.

Еще одна формулировка второго начала термодинамики дается с помощью понятия энтропии (см. 2.4.4). Она гласит: "Энтропия замкнутой системы не может убывать". Иными словами, все процессы в замкнутой системе идут так, что энтропия системы либо возрастает, либо остается постоянной. Максимальная энтропия соответствует наиболее вероятному равновесному состоянию системы. Поэтому статистический смысл последней формулировки второго начала термодинамики очевиден: все процессы в замкнутой системе протекают так, что система стремится к наиболее вероятному состоянию.

С этой точки зрения становится понятной и формулировка второго начала, данная Клаузиусом. Представим себе два тела, температура первого равна  $T_1$ , второго  $T_2$ , причем  $T_1 > T_2$ . Приведем тела в контакт. Получим систему, состоящую из двух тел, и находящуюся в неравновесном состоянии. За счет теплообмена температура тел будет стремиться выровняться, так как такое состояние более вероятно. Это и означает, что первое тело будет остывать, а второе нагреваться. Обратный процесс означал бы переход системы в еще более неравновесное состояние, то есть еще менее вероятное. Ясно, что самопроизвольно такой процесс не может происходить, как не могут, например, самопроизвольно все молекулы воздуха, заполняющего аудиторию, собраться в стакане, стоящем на столе.

### **Статистический вес термодинамической системы. Энтропия**

Энтропия термодинамической системы – важнейшее понятие статистической физики, имеющее глубокий смысл. Понятие энтропии используется во многих областях науки: физике, физической химии, теории информации.

Чтобы уяснить физический смысл энтропии, обратимся к примеру. Рассмотрим простейшую термодинамическую систему - идеальный газ. Для упрощения рассуждений допустим, что наша система состоит всего из четырех молекул. Конечно, это слишком мало, чтобы такой газ можно было назвать термодинамической системой; любая реальная термодинамическая система содержит огромное число молекул (как уже отмечалось, только в  $1 \text{ см}^3$  воздуха

при нормальных условиях содержится порядка  $10^{19}$  молекул). Но для наших рассуждений вполне достаточно и четырех молекул, будем только помнить, что это не более чем очень грубая модель, используемая для иллюстрации понятия энтропии.

Итак, имеется сосуд, содержащий четыре молекулы, пронумерованные цифрами 1, 2, 3, 4 (рис. 1). Мысленно разделим сосуд на две равные части. Молекулы могут располагаться в сосуде по-разному. Некоторые варианты расположения молекул показаны на рис. 1.

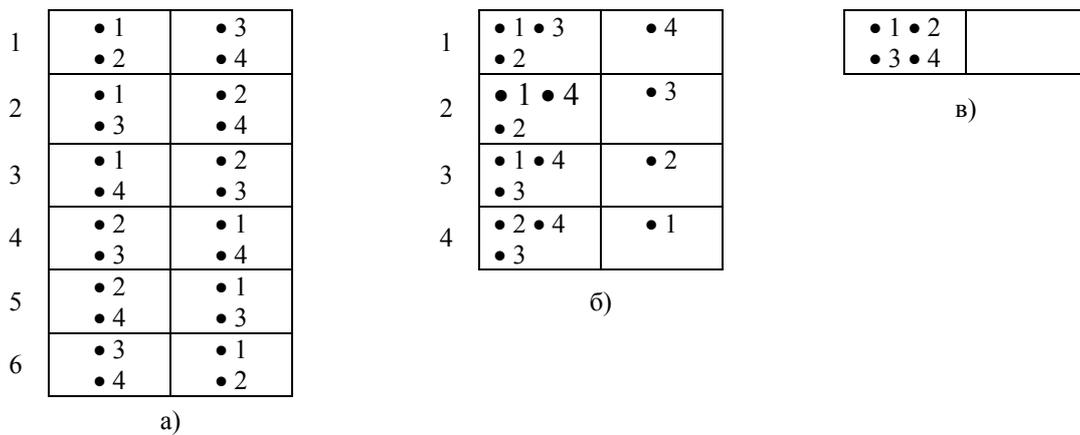


Рис. 1.

Каждый маленький прямоугольник на рис. 1 соответствует одному микросостоянию системы (см. 2.1.2). Отдельные микросостояния различаются значениями микроскопических параметров (параметров отдельных молекул: координата, скорость, импульс, и т.п.), в нашем случае молекулы в каждом микросостоянии имеют различные координаты. На рис. 1 отдельные микросостояния объединены в три группы. Каждая группа микросостояний образует одно макросостояние (см. 2.1.2). Макросостояния отличаются друг от друга уже макроскопическими параметрами (давление, температура, концентрация и т.п.). Например, можно сказать, что на рис. 1а давление в сосуде справа и слева одинаково (так как и справа и слева по две молекулы). На рис. 1б давление в левой половине сосуда больше, чем в правой, а на рис. 1в давление в правой половине сосуда вообще равно нулю.

Введем понятие статистического веса данного макросостояния. По определению статистический вес  $\Omega$  – это число микросостояний, образующих данное макросостояние системы. На рис. 1а  $\Omega = 6$ ; на рис. 1б  $\Omega = 4$ ; на рис. 1в  $\Omega = 1$ .

Обратим внимание на очень важное обстоятельство: на рис. 1а изображено равновесное состояние системы. Статистический вес

такого макросостояния максимален. На рис. 1б состояние неравновесное (если предоставить молекулы самим себе, они, конечно, перераспределятся поровну между половинами сосуда). Статистический вес неравновесного состояния меньше, чем равновесного. На рис. 1в изображено сильно неравновесное состояние. Статистический вес этого состояния еще меньше. Таким образом, чем дальше система от равновесия, тем меньше ее статистический вес; чем ближе состояние системы к равновесному, тем больше его статистический вес. В равновесном состоянии статистический вес максимален.

Если теперь перейти от нашей иллюстративной модели к реальной термодинамической системе, содержащей большое число молекул, то очевидно, что выводы относительно статистического веса равновесных и неравновесных состояний останутся справедливыми. Правда, статистический вес будет выражаться огромным числом, так как при большом числе молекул велико и число возможных микросостояний.

Энтропией  $S$  термодинамической системы называется величина, пропорциональная логарифму статистического веса данного макросостояния системы:

$$S = k \ln \Omega,$$

где  $k$  – постоянная Больцмана.

Как и статистический вес, энтропия является мерой равновесности состояния системы – чем ближе состояние к равновесному, тем больше энтропия такого состояния, энтропия равновесного состояния максимальна.

Из рассмотренного нами примера видно, что энтропия является функцией макроскопических параметров состояния системы: давления, объема, температуры, то есть  $S = S(P, T)$  или  $S = S(V, T)$  или  $S = S(P, V)$  (напомним, что из трех параметров  $P, V, T$  независимыми являются два, третий однозначно связан с ними уравнением состояния). Зная, как изменяются параметры состояния системы в том или ином процессе, можно рассчитать изменение энтропии в этом процессе. Как это делается, показано ниже. Пока же обсудим еще одно важное свойство энтропии – ее связь с вероятностью состояния системы.

Интуитивно понятие вероятности знакомо каждому из повседневной жизни. В теории вероятностей под вероятностью некоторого события понимается отношение числа благоприятных случаев (исходов этого события) к общему числу возможных случаев (исходов). Например, бросая монету, мы можем практически рассчитывать на два возможных исхода: монета может лечь вверх

гербом или вверх цифрой (монета может встать и на ребро, но это практически невозможно). Если мы загадали герб, то число благоприятных случаев равно единице, поэтому вероятность выпадения герба равна  $1/2$ . Если бросать игральную кость (кубик с нанесенными на гранях очками от 1 до 6), то число возможных случаев равно 6 (у кубика 6 граней). Если загадать, например, выпадение 3-х очков, то вероятность такого события будет равна  $1/6$ , так как благоприятный случай один: кубик должен лечь тройкой вверх. Более сложный пример с игральной костью: подсчитаем, какова вероятность получить при одном бросании кости больше трех очков? Благоприятными случаями теперь будут такие: кубик лег вверх четверкой, пятеркой или шестеркой - всего три благоприятных случая. Общее число возможных случаев по-прежнему равно 6. Таким образом, вероятность получить при одном бросании кости больше трех очков равна  $3/6$  или  $1/2$ .

Вернемся к нашей модели газа (рис. 1). На этом рисунке изображены не все возможные случаи расположения молекул: рис. 1б и 1в можно зеркально отразить. Таким образом, общее число возможных случаев расположения молекул равно шестнадцати: 6 (рис. 1а) плюс  $2 \times 4$  (рис. 1б и его зеркальное отражение) плюс  $2 \times 1$  (рис. 1в и его зеркальное отражение), итого 16. Тогда вероятность равновесного состояния (рис. 1а) равна  $6/16$ , неравновесного (рис. 1б) –  $4/16$ , сильно неравновесного (рис. 1в) –  $1/16$ . Видим, что вероятность равновесного состояния, так же как и его статистический вес, максимальна.

Заметим, что при подсчете вероятности  $\omega$  данного макросостояния мы делим статистический вес этого макросостояния на общее число возможных микросостояний  $N$ :

$$\omega = \frac{\Omega}{N} \quad (2)$$

Тогда, очевидно,

$$\ln \omega = \ln \Omega - \ln N,$$

откуда, согласно формуле (1)

$$S = k \ln \omega + \text{const},$$

то есть с точностью до постоянной величины энтропия пропорциональна вероятности данного макросостояния системы.

Теперь легко будет понять, что энтропия характеризует направление термодинамических процессов в замкнутой системе. Если система замкнута, то есть предоставлена самой себе, то рано или поздно она неизбежно придет в равновесное состояние, ибо такое состояние наиболее вероятно. Таким образом, в замкнутой системе

энтропия не может убывать, в любом процессе она будет возрастать до тех пор, пока система не придет в равновесное состояние, после чего энтропия будет постоянной. Математически принцип возрастания энтропии замкнутой системы записывается так:

$$dS_{\text{замкн}} \geq 0.$$

Эта формулы выражает одну из формулировок второго начала термодинамики (см. 2.4.3).

Если система незамкнута, то в ней возможны процессы с убыванием энтропии, но для этого необходимо внешнее воздействие, так как система при этом переходит из более вероятного состояния в менее вероятное. Например, переход из состояния, изображенного на рис. 1в, в состояние, изображенное на рис. 1а, произойдет сам собой: газ расширится и займет весь предоставленный ему объем. Обратный процесс требует внешнего вмешательства: кто-то или что-то должны собрать молекулы в одной половине сосуда.

Заметим, что молекулы, двигаясь хаотически, могут в некоторый момент случайно сами собраться в одной половине сосуда. Однако вероятность такого события, если учесть, что в реальной системе содержится огромное число молекул, ничтожно мала. Таким образом, второе начало термодинамики имеет статистический смысл: в принципе в замкнутой системе уменьшение энтропии возможно, но вероятность такого события ничтожно мала. Тем не менее и в реальных системах наблюдаются незначительные самопроизвольные отклонения от равновесного состояния. Их называют флуктуациями.

### **Расчет изменения энтропии в термодинамических процессах**

Обратимся теперь к расчету энтропии через параметры состояния системы. В разделе 2.2.3 мы указали, что изменение внутренней энергии системы, связанное с изменением параметров отдельных молекул, то есть с изменением микросостояний системы, называется теплообменом. Теплообмен связан с изменением энтропии:

$$dQ = TdS, \quad (1)$$

где  $T$  – температура, при которой происходит изменение энтропии. По первому началу термодинамики

$$dQ = dU + dA,$$

откуда

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{dA}{T}$$

или

$$dS = C_v \frac{dT}{T} + \frac{P}{T} dV, \quad (2)$$

где  $C_v$  – полная теплоемкость системы при постоянном объеме (см. 2.2.4). Выражая из уравнения состояния идеального газа отношение  $\frac{P}{T} = \frac{m R}{\mu V}$  и подставляя его в уравнение (2), получим

$$dS = \frac{m}{\mu} \left( C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} \right). \quad (3)$$

Здесь  $C_v$  – молярная теплоемкость при постоянном объеме (см. 2.2.5 и 2.2.8). Эта формула позволяет рассчитать изменение энтропии в любом процессе.

Пример. Рассчитаем изменение энтропии при изотермическом сжатии газа от объема  $V_1$  до объема  $V_2 = 0,5V_1$ . Согласно формуле (3),

$$\Delta S_{1-2} = \frac{m}{\mu} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1} = -0,69 \frac{m}{\mu} R.$$

Изменение энтропии, как и следовало ожидать, отрицательно, так как сжатие газа происходит под внешним воздействием.

При адиабатическом процессе нет теплообмена с внешней средой, то есть  $dQ = 0$ , следовательно  $dS = 0$  и  $S = \text{const}$ . Поэтому адиабатический процесс называют также изоэнтропийным.

С помощью понятия энтропии очень просто решаются многие задачи термодинамики. Например, выведем формулу для КПД цикла Карно (см. 2.4.2). В координатах  $T-S$  цикл Карно изображен на рис. 2. Напомним, что процессы 1-2 и 3-4 изотермические при температуре нагревателя  $T_1$  и холодильника  $T_2$ , а процессы 2-3 и 4-1 – адиабатические (изоэнтропийные). По определению

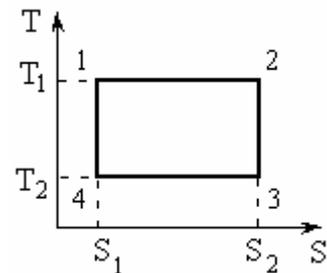


Рис. 2.

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1},$$

но, согласно формуле (3),

$$Q_1 = T_1(S_2 - S_1); \quad Q_2 = T_2(S_3 - S_4),$$

причем  $S_3 = S_2$ ;  $S_4 = S_1$ , значит  $Q_2 = T_2(S_2 - S_1)$ . Подставляя значения  $Q_1$  и  $Q_2$  в формулу для КПД цикла Карно, получим

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Элементы статистической физики**Распределение частиц во внешнем потенциальном поле (распределение Больцмана)**

Для газообразного состояния вещества характерна полная хаотичность в расположении и движении молекул. Само слово "газ" происходит от греческого "хаос". Но если газ находится во внешнем силовом поле, полной хаотичности уже не будет. В потенциальном поле вступает в действие другой общезначимый принцип: любая система стремится занять положение с минимальной потенциальной энергией. В результате противоборства этих двух тенденций - теплового хаотического движения и упорядочивающего воздействия внешнего поля - в пространстве устанавливается некоторое упорядоченное распределение молекул газа. Оно и носит название распределения Больцмана.

Для того, чтобы записать формулу, выражающую распределение Больцмана, напомним, что потенциальная энергия материальной точки является функцией ее координат. Выделим в пространстве элементарный объем  $dV$ , который, однако, содержит достаточно много молекул. Центр этого объема имеет определенные координаты  $x, y, z$ . Пусть в этой точке потенциальная энергия имеет значение  $E_p$ . Тогда распределение Больцмана можно записать в следующем виде:

$$n(x, y, z) = n_0 \exp\left(-\frac{E_p(x, y, z)}{kT}\right), \quad (1)$$

где  $n(x, y, z)$  – концентрация молекул газа в элементарном объеме  $dV$  с центром в точке с координатами  $x, y, z$ , в которой потенциальная энергия равна  $E_p$ ;  $n_0$  – концентрация в элементарном объеме  $dV$  с центром в точке, где потенциальная энергия равна нулю,  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура.

Например, молекулы воздуха в приземном слое атмосферы находятся практически в однородном гравитационном поле, потенциальная энергия молекулы является функцией одной координаты – высоты  $h$  над поверхностью Земли:  $E_p = mgh$ , где  $m$  – масса молекулы. Тогда распределение Больцмана примет вид:

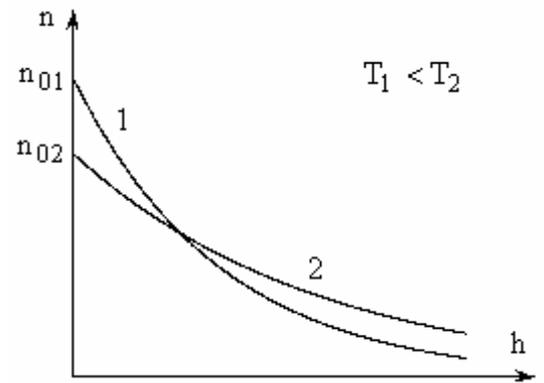
$$n(h) = n_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) \quad (2)$$

или в более удобном виде

$$n(h) = n_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right) \quad (3)$$

где  $\mu$  – молярная масса газа,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $n_0$  – концентрация молекул у поверхности Земли при  $h = 0$ .

На рисунке показаны распределения молекул газа по высоте, согласно формулам (2) и (3), при различных температурах. Из рисунка видно, что, чем больше температура, тем более равномерно распределены молекулы по высоте. Почему так? Обратимся к формуле (2). Величина  $mgh$ , как уже говорилось, это потенциальная энергия молекулы, величина  $kT$  характеризует тепловую (внутреннюю) энергию газа, то есть фактически кинетическую энергию его молекул. Если  $T \rightarrow \infty$ , то есть кинетическая энергия молекул много больше потенциальной, то молекулы расположатся совершенно хаотически, так как влияние внешних сил в этом случае ничтожно. График распределения будет иметь вид прямой, параллельной оси абсцисс: на любой высоте одинаковая концентрация. Если  $T \rightarrow 0$ , то  $n = 0$  на любой высоте. Это означает, что все молекулы расположились на нулевой высоте у поверхности Земли и заняли положение с минимальной потенциальной энергии. При  $T > 0$  молекулы располагаются по высоте неравномерно, что и изображено на рисунке, причем, чем больше температура газа, тем ближе распределение к равномерному.



Следствием формулы (2) является так называемая барометрическая формула, которая описывает зависимость давления воздуха от высоты над поверхностью Земли. Так как по основному уравнению молекулярно-кинетической теории (см. 2.1.6)  $P = nkT$ , то при постоянной температуре  $P \sim n$ . Тогда формула для зависимости давления от высоты будет совершенно аналогична формулам (2) и (3):

$$P(h) = P_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) = P_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right), \quad (4)$$

где  $P_0$  – давление у поверхности Земли (обычно на уровне моря).

В реальной атмосфере возможны, конечно, отклонения от формулы (4), так как предположение о постоянстве температуры по высоте не выполняется.

### Распределение молекул газа по значениям скорости (распределение Максвелла)

Молекулы газа, как уже неоднократно говорилось, движутся хаотически. Скорость отдельных молекул (точнее, модуль скорости) – типичный пример *случайной величины*, которая может меняться в принципе от нуля до очень больших значений. Случайные величины подчиняются статистическим закономерностям. Одна из таких закономерностей – распределение Максвелла, которое описывает распределение значений модуля скорости молекул газа.

Поставим вопрос: какова вероятность обнаружить в газе молекулу, скорость которой равна, например, 500 м/с? Ответ будет на первый взгляд странным: вероятность такого события равна нулю. Почему? А вот почему. Число 500 занимает на числовой оси одну точку, поэтому вероятность события, о котором мы говорим, равна вероятности попасть в точку. Убедиться в том, какова эта вероятность, может каждый, поставив на бумаге точку карандашом, а затем попробовав попасть в нее

наугад. Поэтому поставленный нами вопрос некорректен. Имеет смысл говорить только о вероятности того, что модуль скорости любой наугад выбранной молекулы имеет значение в некотором заданном интервале скоростей от  $v_1$  до  $v_2 = v_1 + \Delta v$  (например, от 500 до 510 м/с). Интервал может быть очень узким, но все равно на числовой оси это не точка, а некоторый отрезок, и вероятность попасть в него, как бы ни была мала, отлична от нуля. Вероятность попадания модуля скорости молекулы в любой заданный интервал от  $v$  до  $v + dv$  и описывается распределением Максвелла.

Проще всего формулу распределения Максвелла записать в относительных единицах, когда скорости молекул приводятся к безразмерному виду делением на так называемую наиболее вероятную скорость –  $v_{н.в.}$ . Отношение скорости молекулы к наиболее вероятной скорости называется относительной скоростью  $u = \frac{v}{v_{н.в.}}$ . Очевидно, наиболее вероятная скорость является уже характеристикой всей системы в целом, поэтому она связана с температурой газа (макропараметром) следующим образом:

$$v_{н.в.} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$$

где  $m$  – масса одной молекулы,  $k$  – постоянная Больцмана,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $\mu$  – молярная масса,  $T$  – абсолютная температура. Наиболее вероятная скорость немного меньше среднеквадратичной скорости.

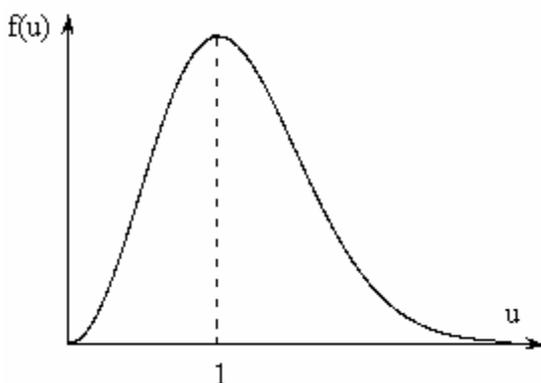
В относительных единицах распределение Максвелла имеет вид:

$$f(u) = \frac{dn}{n du} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 \exp(-u^2)$$

Здесь  $f(u)$  – т.н. функция плотности вероятности или функция распределения соответствующей случайной величины (в нашем случае относительной скорости  $u$ ). Она равна отношению числа молекул  $dn$ , скорость которых заключена в интервале от  $u$  до  $u + du$ , к общему числу молекул  $n$  и к ширине интервала  $du$ . По физическому смыслу отношение  $\frac{dn}{n}$  есть вероятность обнаружить молекулу, скорость которой заключена в интервале от  $u$  до  $u + du$  (или, иначе,  $\frac{dn}{n}$  – доля молекул, скорость которых заключена в заданном интервале).

График функции  $f(u)$  приведен на рисунке, откуда видно, что доля молекул с малыми скоростями невелика, доля молекул с большими скоростями так же невелика. Большинство молекул имеет скорость, близкую к наиболее вероятной  $v_{н.в.}$  ( $u = 1$ ). Средняя арифметическая скорость молекул  $v_{ср}$  больше наиболее вероятной  $v_{н.в.}$  и рассчитывается по формуле

$$v_{ср} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}$$



## Средняя длина свободного пробега молекул

Средней длиной свободного пробега молекул называется среднее расстояние, которое молекула пролетает между двумя последовательными столкновениями. Так как молекулы движутся хаотически, то расстояние, которое молекула проходит от одного столкновения до следующего, - величина случайная. Поэтому имеет смысл говорить лишь о средней длине свободного пробега.

От чего зависит средняя длина свободного пробега? Представим себе молекулу, только что столкнувшуюся с другой молекулой. После столкновения она движется равномерно и прямолинейно до следующего столкновения. Вероятность следующего столкновения, очевидно, растет с увеличением количества молекул, точнее, их концентрации и размеров молекул, точнее площади их сечения. Поэтому для длины свободного пробега с достаточной точностью можно записать

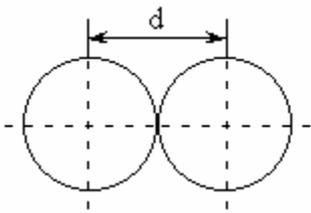


Рис. 1.

$$\lambda = \frac{1}{n\pi d^2}, \quad (1)$$

где  $n$  – концентрация молекул газа,  $d$  – т.н. эффективный диаметр молекул. Под эффективным диаметром понимают наименьшее расстояние между центрами молекул в момент столкновения (рис. 1).

Проанализируем, как зависит длина свободного пробега молекул от параметров состояния газа. Из формулы (1) видно, что длина свободного пробега должна быть обратно пропорциональна давлению газа, так как концентрация молекул и давление находятся в прямой зависимости по основному уравнению молекулярно кинетической теории:  $P = nkT$ . Поэтому с ростом давления длина свободного пробега будет убывать, а с уменьшением давления возрастать. Но возрастать неограниченно длина свободного пробега не может. Как только она станет равной размерам сосуда, в котором заключен газ, дальнейшее понижение давления не приведет к возрастанию длины свободного пробега (рис. 2, а – линейный размер сосуда). Состояние газа, при котором длина свободного пробега не зависит от давления, то есть молекулы газа не сталкиваются друг с другом, а сталкиваются только со стенками сосуда, называется термодинамическим вакуумом.

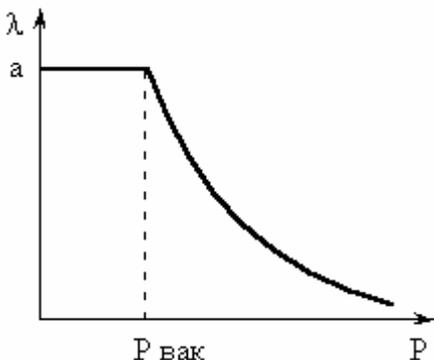


Рис. 2.

С ростом температуры средняя длина свободного пробега очень незначительно увеличивается, так как при увеличении температуры слегка уменьшается эффективный диаметр молекул. Однако с хорошей точностью можно считать длину свободного пробега не зависящей от температуры.

Среднее число столкновений молекул в единицу времени вычисляется очень просто. Средний путь, который проходит молекула в единицу времени, численно равен средней скорости молекул. Средний

путь между двумя столкновениями, по определению, - это длина свободного пробега. Поэтому

$$z = \frac{v_{\text{ср}}}{\lambda}.$$

Подставляя выражение для  $v_{\text{ср}}$  (см. 2.5.2) и  $\lambda$  (см. 2.6.1), получим

$$z = n\pi d^2 \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}.$$

## Явления переноса. Диффузия

Диффузия относится к так называемым явлениям переноса (см. также 2.6.4, 2.6.5). Диффузия – это перенос массы (или концентрации) вещества. Если в аудитории разлить резко пахнущую жидкость (например, бензин или ацетон), то сначала запах его не ощущается, затем его почувствуют ближние ряды, потом дальние и постепенно запах распространится по всей аудитории. Это объясняется диффузией молекул пахучего вещества в воздухе.

Для простоты будем считать, что перенос массы происходит вдоль оси  $x$ . Тогда уравнение диффузии можно записать в виде:

$$\Delta m = -D \frac{d\rho}{dx} \Delta S \Delta t,$$

где  $\Delta m$  – масса, переносимая молекулами газа за время  $\Delta t$  через площадь  $\Delta S$ , перпендикулярную потоку вещества,  $\frac{d\rho}{dx}$  – градиент плотности вещества (производная от плотности по координате, в направлении которой происходит диффузия),  $\Delta S$  – площадь, перпендикулярная потоку вещества, через которую происходит перенос массы,  $\Delta t$  – время переноса,  $D$  – коэффициент диффузии. Размерность коэффициента диффузии  $[D] = \text{м}^2 / \text{с}$ . Знак "минус" в уравнении диффузии означает, что диффузионный поток идет в сторону убывания плотности. Необходимым условием диффузии является наличие градиента плотности  $\frac{d\rho}{dx}$ . Если

$\frac{d\rho}{dx} = 0$ , диффузионный поток отсутствует.

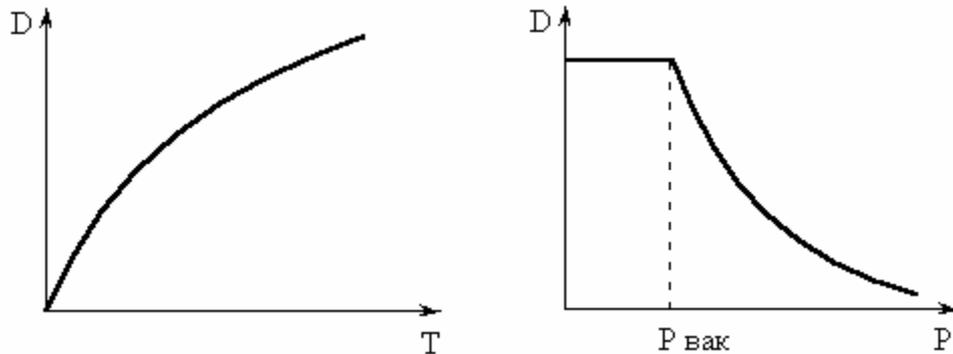
Логично предположить, что коэффициент диффузии будет тем больше, чем больше длина свободного пробега молекул и их скорость. Из этих величин можно составить только одну комбинацию с размерностью коэффициента диффузии  $\text{м}^2 / \text{с}$ , а именно:  $D \sim v_{\text{ср}} \lambda$ . Точная формула имеет вид:

$$D = \frac{1}{3} v_{\text{ср}} \lambda.$$

Поскольку средняя скорость молекул  $v_{\text{ср}}$  пропорциональна  $\sqrt{T}$  (см. 2.5.2), а длина свободного пробега обратно пропорциональна давлению (см. 2.6.1), то

$$D \sim \sqrt{T} \quad \text{и} \quad D \sim \frac{1}{P}.$$

При низких давлениях, когда длина свободного пробега постоянна (см. 2.6.1), коэффициент диффузии также не зависит от давления. Зависимость коэффициента диффузии от давления и температуры представлена на рисунке.



### Теплопроводность газов

Теплопроводность, как и диффузия, относится к явлениям переноса. Теплопроводностью называют перенос энергии. Молекулы из области высокой температуры, где они имели большую кинетическую энергию, переходят в область с низкой температурой и переносят эту энергию.

Пусть перенос энергии происходит вдоль оси  $x$ . Тогда уравнение теплопроводности можно записать в виде:

$$\Delta E = -\chi \frac{dT}{dx} \Delta S \Delta t$$

где  $\Delta E$  – энергия, переносимая молекулами газа за время  $\Delta t$  через площадь  $\Delta S$ , перпендикулярную потоку тепла,  $\frac{dT}{dx}$  – градиент температуры (производная от температуры по координате, в направлении которой происходит перенос энергии),  $\chi$  – коэффициент теплопроводности. Коэффициент теплопроводности имеет размерность  $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ . Знак "минус" в уравнении теплопроводности означает, что поток энергии идет в сторону уменьшения температуры, как того требует второе начало термодинамики (см. 2.4.3). Необходимым условием теплопроводности является наличие градиента температуры  $\frac{dT}{dx}$ .

Коэффициент теплопроводности газа вычисляется по формуле

$$\chi = \frac{1}{3} \rho v_{\text{ср}} \lambda c_v, \quad (1)$$

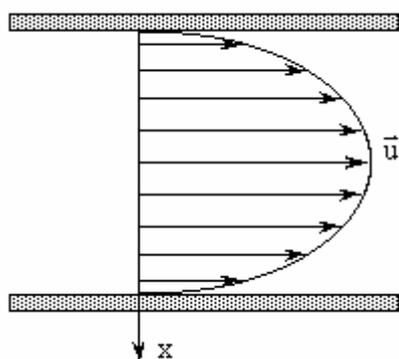
где  $\rho$  – плотность газа,  $v_{\text{ср}}$  – средняя скорость молекул,  $\lambda$  – длина свободного пробега,  $c_v$  – удельная теплоемкость при постоянном объеме.

Из формулы (1) видно, что, чем меньше плотность разреженного газа, тем меньше коэффициент теплопроводности. Поэтому разреженный газ является

хорошим теплоизолятором. Примером может служить обыкновенный термос, колба которого имеет двойные стенки, между которыми находится газ при низком давлении. В основном поток тепла в термосе идет через пробку. По такому же принципу (аналогично бытовому термосу) устроены т.н. сосуды Дьюара, в которых в промышленности хранят сжиженные газы, имеющие низкую температуру кипения, например, жидкие азот, водород, кислород и т.п.

### Внутреннее трение (вязкость) в газах

Внутреннее трение – еще одно явление переноса (наряду с диффузией и теплопроводностью). Внутреннее трение – это перенос импульса молекул, которым они обладают в упорядоченном движении. Поясним сказанное. Представим себе газ, который течет по некоторому каналу, причем скорость различных слоев газа неодинакова, то есть имеется градиент скорости  $\frac{du}{dx}$ , где  $u$  – скорость направленного течения газа в данном слое,  $x$  – координата, перпендикулярная направлению движения слоев газа (рис.). Напомним, что кроме скорости направленного движения молекулы газа будут иметь еще и тепловую скорость  $v$ , причем всегда  $v \gg u$ . Именно за счет теплового движения, переходя из слоя в слой, молекулы переносят свой импульс  $mv$  в направленном движении. При этом импульс слоя меняется, а изменение импульса, по второму закону Ньютона, есть проявление силы. Эта сила называется силой внутреннего трения.



Уравнение вязкости можно записать в виде

$$\Delta p = -\eta \frac{du}{dx} \Delta S \Delta t,$$

где  $\Delta p$  – импульс, переносимый молекулами за время  $\Delta t$  через площадку  $\Delta S$  соприкосновения слоев,  $\frac{du}{dx}$  – поперечный градиент скорости (производная от скорости направленного движения молекул газа по координате, перпендикулярной этой скорости),  $\eta$  – коэффициент вязкости. Коэффициент вязкости имеет размерность Па·с. Знак "минус" в уравнении вязкости означает, что поток импульса происходит в сторону убывания скорости направленного движения слоев газа.

Так как по второму закону Ньютона  $\frac{\Delta p}{\Delta t}$  есть не что иное, как сила  $F$ , уравнение вязкости можно переписать иначе, выделив в нем силу внутреннего трения:

$$F = -\eta \frac{du}{dx} \Delta S.$$

Сила внутреннего трения направлена в сторону, противоположную скорости данного слоя.

Коэффициент вязкости газа выражается формулой

$$\eta = \frac{1}{3} \rho v_{\text{cp}} \lambda,$$

где  $\rho$  – плотность газа,  $v_{\text{cp}}$  – средняя скорость теплового движения молекул газа,  $\lambda$  – средняя длина свободного пробега молекул.

Реальные газы**Уравнение Ван-дер-Ваальса**

Уравнение Ван-дер-Ваальса описывает состояние реального газа. Оно, как и уравнение состояния идеального газа, связывает параметры этого газа: давление, объем и температуру. Прежде чем записать его, выясним, чем отличается реальный газ от идеального. Напомним, что идеальный газ - это газ *не взаимодействующих* между собою молекул, которые считаются материальными точками. В реальном газе молекулы взаимодействуют между собой. Это взаимодействие носит характер отталкивания на малых расстояниях и притяжения на больших. Природа этих сил электрическая. Силы отталкивания очень сильно зависят от расстояния и резко возрастают при попытке сблизить молекулы. Поэтому эффективный диаметр молекул почти не зависит от температуры, и, в первом приближении, можно считать молекулы жесткими шариками. Силы притяжения зависят от расстояния менее сильно, убывая с ростом расстояния. Запишем теперь уравнение Ван-дер-Ваальса и поясним его физический смысл. Для одного моля газа оно имеет вид:

$$\left( P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT, \quad (1)$$

где  $a$  и  $b$  – константы Ван-дер-Ваальса. Каков их физический смысл? Если сравнить уравнение (1) с уравнением состояния 1 моля идеального газа

$$PV = RT, \quad (2)$$

то можно заметить, что уравнение Ван-дер-Ваальса отличается двумя поправками: давление возрастает на величину  $\frac{a}{V^2}$ , объем уменьшается на величину  $b$ .

Выясним сначала физический смысл поправки  $b$ . Из уравнения (2) видно, что при  $P \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow 0$ , то есть идеальный газ можно сжать в точку. С реальным газом этого сделать нельзя. Молекулы, которые мы договорились считать жесткими шариками, имеют *собственный объем*, и сжать газ можно только до этого объема. Поэтому при  $P \rightarrow \infty$  объем реального газа должен стремиться к некоторой величине  $b$ , что и следует из уравнения (1). Таким образом, величина  $b$  представляет собой *собственный объем* молекул газа. Поправка  $b$ , таким образом,

учитывает силы отталкивания между молекулами.

Теперь выясним смысл поправки к давлению  $\frac{a}{V^2}$ . Давление идеального газа есть результат бомбардировки стенок сосуда молекулами этого газа. Согласно основному уравнению молекулярно-кинетической теории, давление газа пропорционально концентрации молекул  $P \sim n$ . В идеальном газе в равновесном состоянии концентрация постоянна по всему объему. В реальном газе это не так. Причина - наличие сил притяжения между молекулами газа. Если молекула находится в глубине сосуда, то действие сил притяжения со стороны окружающих ее молекул скомпенсировано. Если же молекула находится вблизи стенки, то действие сил притяжения нескомпенсировано: имеется результирующая сила, направленная вглубь газа. Молекула, подлетающая к стенке, находится как бы в силовом поле, причем сила направлена от стенки в объем газа. Поэтому концентрация молекул у стенки, согласно распределению Больцмана (см. 2.5.1.), меньше, чем в глубине. Соответственно и давление меньше, чем при постоянной концентрации. Иными словами, давление реального газа при той же температуре меньше, чем идеального:

$$P = P_{\text{ид}} - P' . \quad (3)$$

Очевидно, что величина поправки в давлении  $P'$  пропорциональна, с одной стороны, концентрации газа, с другой стороны, силе, действующей на молекулу, подлетающую к стенке. Эта сила, в грубом приближении, тоже пропорциональна концентрации. Поэтому  $P' \sim n^2$  или  $P' \sim \frac{1}{V^2}$ . Вводя коэффициент пропорциональности, запишем

$P' = \frac{a}{V^2}$ , тогда, согласно уравнению (3), получим

$$P_{\text{ид}} = P + \frac{a}{V^2} .$$

Поправка  $\frac{a}{V^2}$  учитывает, таким образом, наличие сил притяжения между молекулами. Подставляя значение давления идеального газа в уравнение (2), учитывая также поправку  $b$ , получим уравнение Ван-дер-Ваальса (1).

Напомним, что уравнение (1) относится к одному молю газа, поэтому в нем фигурирует не общий объем, а молярный. Если записать уравнение Ван-дер-Ваальса для произвольного количества молей  $\nu = \frac{m}{\mu}$ , то общий объем будет в  $\nu$  раз больше молярного. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$\left( P + \nu^2 \frac{a}{V^2} \right) (V - \nu b) = \nu RT.$$

В заключение отметим, что константы  $a$  и  $b$  обычно определяются экспериментально.

### Изотермы Ван-дер-Ваальса. Сжижение газов

Напомним, что изотерма – это линия, изображающая графически связь между давлением и объемом газа в изотермическом процессе, то есть при постоянной температуре. Уравнение изотермы получается из соответствующего уравнения состояния газа при  $T = \text{const}$ .

В чем отличие изотерм идеального и реального газов? Обратимся к уравнениям состояния этих газов. Для простоты рассмотрим 1 моль газа. При условии  $T = \text{const}$  уравнение состояния идеального газа имеет вид:

$$PV = \text{const}, \quad (1)$$

а реального газа –

$$\left( P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = \text{const}. \quad (2)$$

Видим, что уравнение (1) является уравнением первой степени относительно объема, то есть одному значению давления соответствует одно значение объема. Изотермы идеального газа изображены на рис. 1. В отличие от уравнения (1), уравнение (2) является уравнением 3-й степени относительно объема. Из математики известно, что уравнение 3-й степени имеет или 3 действительных корня, или один действительный и два мнимых. Это значит, что одному значению давления соответствует или одно значение объема (так как мнимая величина объема не имеет физического смысла), или 3 значения объема. Сказанное иллюстрируется рис. 2, на котором изображено несколько теоретических изотерм реального газа, соответствующих уравнению (2). При температурах  $T_1$  и  $T_2$  одному значению давления

соответствует три значения объема, при температуре  $T_3$  – одно значение. Из рис. 2 видно, что при достаточно высоких температурах реальный газ ведет себя как идеальный. Это естественно, так как при высоких температурах кинетическая энергия молекул – энергия теплового движения – становится много больше потенциальной энергии взаимодействия молекул, и этим взаимодействием можно пренебречь.

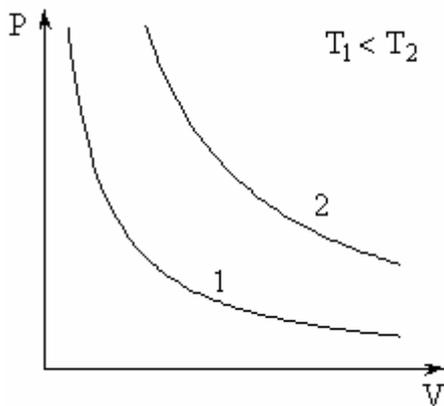


Рис. 1.

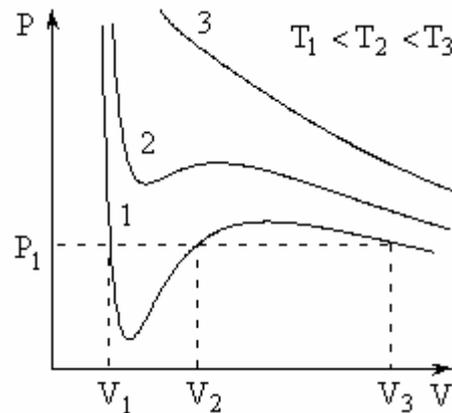


Рис. 2.

Изотермы, изображенные на рис. 2, как указано выше, теоретические. Реальные изотермы, полученные экспериментально, отличаются от теоретических, причем это отличие имеет глубокий физический смысл. Рассмотрим одну из теоретических изотерм (рис. 3). Будем изотермически сжимать газ. Согласно рис. 3, на участке 1-2-3 поведение газа естественно: при уменьшении объема повышается давление. То же самое на участке 4-5-6. Но на участке 3-4 поведение газа противоречит всем представлениям о свойствах газов. На этом участке с уменьшением объема уменьшается и давление, то есть чем больше сжимаем газ, тем легче это сделать. Ясно, что реальное вещество так вести себя не может. Поэтому, в действительности, процесс сжатия реального газа идет по линии 1-2-5-6. Эта линия называется экспериментальной изотермой Ван-дер-Ваальса, так как она может быть получена только экспериментально. Что же собой представляет горизонтальный

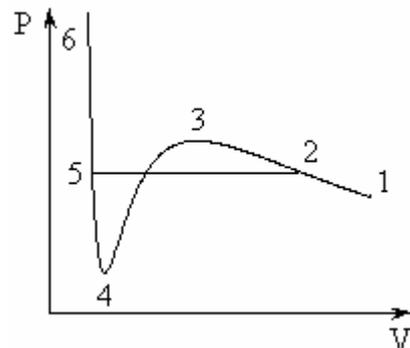


Рис. 3.

участок изотермы 2-5? Почему здесь при уменьшении объема не растет давление? Ведь если  $T = \text{const}$ , то по основному уравнению молекулярно кинетической теории  $P \sim n$ , значит, на участке 2-5 с уменьшением объема не растет концентрация. Куда же исчезают молекулы газа? Ответ прост: на участке 2-5 происходит превращение газа в жидкость, часть молекул газа уходит в жидкость, а концентрация молекул газа не меняется. Поэтому и давление на участке 2-5 не растет. В точке 5 все вещество перешло в жидкое состояние, и при дальнейшем сжатии давление резко растет, так как жидкость практически несжимаема.

Рассмотрим еще один важный вывод, вытекающий из анализа экспериментальных изотерм Ван-дер-Ваальса. На рис. 4 изображено несколько экспериментальных изотерм при разных температурах. С увеличением температуры горизонтальный участок изотерм, соответствующий переходу вещества из газообразного состояния в жидкое, уменьшается и при достаточно высоких температурах (на рис. 4 при  $T > T_3$ ) исчезает совсем. Это значит,

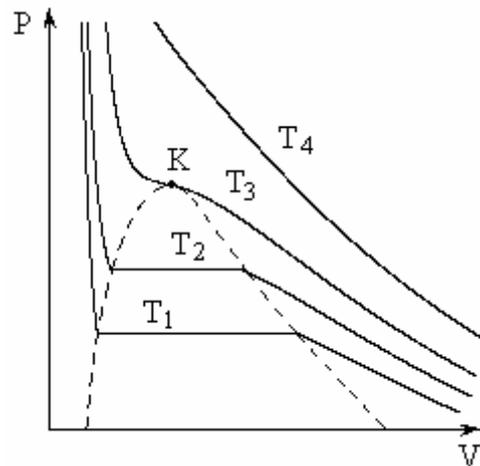


Рис. 4.

что при таких высоких температурах вещество при сжатии не переходит в жидкое состояние, а остается в газообразном. Среди множества изотерм Ван-дер-Ваальса существует одна, у которой горизонтальный участок стягивается в точку, то есть эта изотерма отделяет изотермы с горизонтальным участком от монотонных кривых. Эта изотерма называется критической. Ей соответствует критическая температура —  $T_{кр}$ . Если температура газа ниже критической, то при сжатии такой газ можно превратить в жидкость. Если  $T > T_{кр}$ , то никаким сжатием такой газ нельзя превратить в жидкость.

Примером газа, у которого критическая температура ниже комнатной, является кислород ( $T_{кр} = 154,78 \text{ K}$ ). Для того, чтобы превратить в жидкость такой газ, его нужно предварительно охладить до температуры, ниже критической.

**Фазовые превращения.****Диаграмма состояния вещества**

Обратимся еще раз к экспериментальным изотермам Ван-дер-Ваальса (см. 2.7.2). На рис. 1 изображены две такие изотермы для разных температур. Видим, что при данной температуре переход из газообразного состояния в жидкое и обратно происходит при определенном давлении: для температуры  $T_1$  это давление  $P_1$ , для температуры  $T_2$  – давление  $P_2$ . С ростом температуры давление, соответствующее переходу жидкость-газ или газ-жидкость, повышается. Если изобразить графически зависимость давления перехода жидкость-газ от температуры, получим картину, изображенную на рис. 2. На рис. 2 показаны те же температуры  $T_1$  и  $T_2$  и давления  $P_1$  и  $P_2$ , что и на рис. 1.

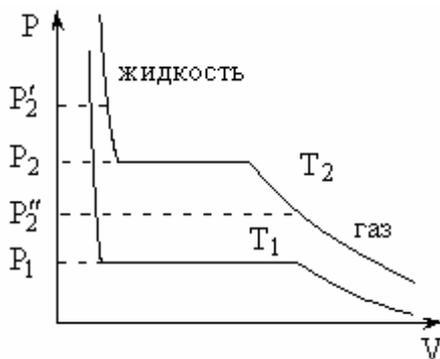


Рис. 1.

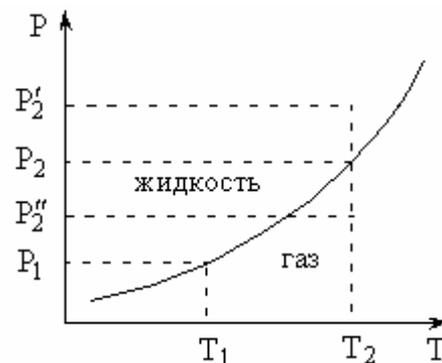


Рис. 2.

А если при температуре  $T_2$  вещество будет находиться под давлением выше, чем  $P_2$ , например,  $P'_2$ ? Из рис. 1 видно, что при давлении  $P'_2$  мы попадаем на участок изотермы, соответствующий жидкому состоянию вещества. Поэтому на рис. 2 область, расположенная выше линии  $P(T)$ , соответствует жидкому состоянию вещества. Если при температуре  $T_2$  давление будет меньше, чем  $P_2$ , например,  $P''_2$ , то из рис. 1 видим, что вещество в этом случае будет находиться в газообразном состоянии. Таким образом, на рис. 2 наглядно показано, в каком состоянии находится вещество при данных давлении и температуре. Этот рисунок, конечно, неполный. На нем отсутствуют линии, ограничивающие твердое и жидкое состояние, твердое и газообразное. Если изобразить эти линии,

получим нечто похожее на рис. 3. Этот рисунок и представляет собой простейшую диаграмму состояния вещества.

Какую информацию несет эта диаграмма? Прежде всего, она показывает, в каком состоянии находится вещество при данных давлении и температуре. При низких температурах и высоких давлениях вещество находится в твердом состоянии, при высоких температурах и низких давлениях – в газообразном. Жидкое состояние занимает промежуточное положение.

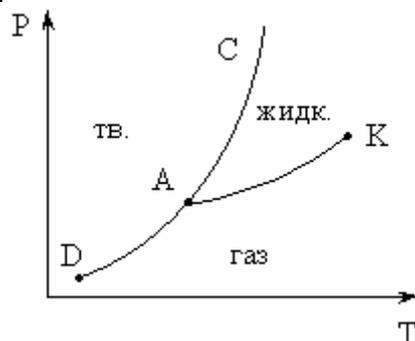


Рис. 3.

Линии DA, АК, AC изображают переходы вещества из одного состояния в другое (см. подробнее 2.8.2). Линия DA соответствует переходу из твердого состояния в газ. Это так называемая сублимация. Например, в морозную погоду высыхает замерзшее белье, вешенное для просушки. В морозную ночь высыхает мокрый асфальт. Линия AC соответствует переходу из твердого состояния в жидкое – плавлению (обратный процесс – кристаллизация). Линия AC уходит в бесконечность. Линия АК соответствует испарению, то есть переходу из жидкого состояния в газообразное (обратный переход – конденсация). Эта линия кончается в точке К. Эта точка - не что иное, как критическая точка. Она соответствует критической температуре (см. 2.7.2). Выше этой температуры отсутствует переход газ-жидкость, поэтому нет линии, соответствующей этому переходу. Если давление и температура соответствуют какой-либо линии на рис. 3, то при этих условиях вещество находится одновременно в двух состояниях в равновесии. Например, при 0 °С и атмосферном давлении лед не будет таять, а вода не будет замерзать.

На рис. 3 есть еще одна характерная точка – т. А. Она называется тройной точкой вещества. При давлении и температуре, соответствующих тройной точке, вещество одновременно будет находиться в равновесии в трех состояниях - твердом, жидком и газообразном. Для воды, например, тройная точка соответствует температуре 273,16 К и давлению 610 Па. Если в каком-либо сосуде создать такие давление и температуру, то в нем в воде будут плавать льдинки, над водой будет водяной пар, причем лед не будет таять, вода не будет ни замерзать, ни испаряться, водяной пар не будет конденсироваться, и такое состояние будет сохраняться как угодно долго.

### 2.8.2. Фазовые переходы

Фазой вещества называется макроскопическая, физически однородная часть вещества, отделенная границей раздела. Например, если в стакане с водой плавает кусочек льда, то одно и то же вещество – вода – в данном случае находится в двух фазах: жидкой и твердой. Из этого примера, однако, может показаться, что понятие фазы совпадает с понятием агрегатного состояния. Это не так. В одном агрегатном состоянии вещество может находиться в разных фазах. Например, существуют две фазы твердого углерода: графит и алмаз, совершенно разные по своим физическим свойствам. Олово при комнатной температуре существует в виде так называемого белого олова, которое при низких температурах превращается в другую фазу – серое олово – рыхлый порошок. Такое превращение, кстати, может вызвать выход из строя электронной аппаратуры, эксплуатирующейся в условиях низких температур, если пайка выполнена оловом. Железо в твердом состоянии имеет даже три фазы:  $\alpha$ -,  $\beta$ -,  $\gamma$ - железо. И таких примеров можно привести много. Естественно, что разные агрегатные состояния одного и того же вещества представляют собой одновременно и разные фазы.

Фазовым переходом называется превращение вещества из одной фазы в другую. В зависимости от условий такого превращения фазовые переходы делятся на переходы первого и второго рода. Фазовые переходы первого рода связаны с выделением или поглощением энергии, фазовые переходы второго рода не сопровождаются энергетическими эффектами.

К фазовым переходам первого рода относятся все переходы вещества из одного агрегатного состояния в другое: плавление, испарение, сублимация и обратные процессы. Количество теплоты, необходимое для перехода некоторой массы вещества из одной фазы в другую, рассчитывается по формуле

$$Q = qm,$$

где  $m$  – масса вещества,  $q$  – так называемая удельная теплота фазового перехода, то есть количество теплоты, необходимое для перехода единицы массы вещества из одной фазы в другую. Если в прямом переходе теплота поглощается (например, при плавлении), то в обратном (кристаллизация) это же количество теплоты выделяется.

В чем физический смысл удельной теплоты фазового перехода? Эта теплота идет на увеличение внутренней энергии вещества, которое связано с изменением характера теплового движения молекул

при переходе из одного состояния в другое.

Фазовые переходы второго рода не связаны с изменением характера теплового движения молекул, поэтому и протекают без затрат тепла. Примером фазового перехода второго рода, как уже отмечалось, является переход алмаз-графит, который протекает при высоких температурах. В этом переходе происходит перестройка кристаллической решетки углерода, но характер теплового движения остается прежним. Кстати, возможно и обратное превращение: из графита можно получать алмазы.

В заключении отметим, что изображенная на рис. 3 (2.8.1) диаграмма состояния вещества относится к такому веществу, которое в каждом агрегатном состоянии может находиться только в одной фазе. Если в одном агрегатном состоянии возможны несколько фаз, диаграмма будет сложнее.

Диаграммы состояния известны для многих веществ, что позволяет предсказать их поведение при различных условиях.