

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тверской государственный технический университет»
(ТвГТУ)

А.Ф. Гусев, М.В. Новоселова

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

Учебное пособие

Допущено Федеральным УМО в системе высшего образования
по укрупненной группе специальностей и направлений подготовки
23.00.00 – «Техника и технологии наземного транспорта»
в качестве учебного пособия для обучающихся по направлениям подготовки:
«Наземные транспортно-технологические комплексы»,
«Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов»,
уровень образования – бакалавриат

Тверь 2017

УДК 534.1
ББК 22.3:22.213я7

Рецензенты: заведующий кафедрой «Основы конструирования механизмов и машин» Уфимского государственного авиационного технического университета, доктор технических наук, профессор Мигранов М.Ш.; заведующий кафедрой «Строительные, дорожные машины и оборудование» Тверского государственного технического университета, доктор технических наук, профессор Кондратьев А.В.

Гусев, А.Ф. Прикладная теория колебаний: учебное пособие / А.Ф. Гусев, М.В. Новоселова. Тверь: Тверской государственный технический университет, 2017. 160 с.

Изложены основы прикладной теории колебаний механических систем. Приведены основные сведения из линейной теории колебаний осцилляторов с одной и двумя степенями свободы, общие сведения о нелинейных колебаниях осцилляторов с одной степенью свободы. Рассмотрены свободные, вынужденные, параметрические колебания и автоколебания осцилляторов. Теоретические сведения пояснены расчетными примерами. В конце каждой главы дан список вопросов для самоконтроля усвоения учебного материала.

Предназначено для самостоятельной работы студентов при подготовке к коллоквиумам, зачету, экзамену.

ISBN 978-5-7995-0908-8

© Тверской государственный
технический университет, 2017
© Гусев А.Ф., Новоселова М.В., 2017

ВВЕДЕНИЕ

Колебания – это движения или процессы, характеризующиеся определенной повторяемостью во времени.

Колебательные процессы чрезвычайно широко распространены в природе и во всех отраслях науки и техники и чрезвычайно разнообразны. Приведем примеры колебательных процессов: в географии – смена дня и ночи, колебания земной коры, приливы и отливы; в медицине – работа сердца, дыхание; в экологии – колебания популяций хищников в экосистемах; в экономике – колебания курса акций, спроса и предложения на товары и услуги; в физике – разделы: молекулярно-кинетическая теория, акустика, оптика, электромагнитные волны – исследуют колебательные процессы различной природы; в технике – колебания строительных конструкций, работа двигателя внутреннего сгорания. Радиотехника практически целиком основана на использовании колебательных процессов.

Необходимо отметить два момента.

1. Колебания в технике играют огромную роль.

В большинстве случаев колебания и вибрации в машинах представляют нежелательные явления: крутильные колебания коленчатых валов, вибрации корпусов и станин, мостовых сооружений и т.д. Они при неблагоприятных условиях могут вызвать опасные напряжения, деформации и износ.

В ряде случаев колебания являются причиной серьезных аварий и катастроф: разрушение мостов, флаттер, шимми. Иногда они оказывают вредное физиологическое воздействие на организм человека, подвергающегося длительным вибрациям.

В технике нередко случаи полезного использования колебаний. Колебания используют для осуществления технологических процессов в машинах и приборах: вибрационное погружение свай, виброзапрессовка деталей, виброуплотнители грунта, вибрационное транспортирование грузов, различного вида грохоты (вибросита), вибрационные тепло- и массообменные аппараты.

Создание и эксплуатация современных машин немыслимы без учета колебательных процессов, во многом определяющих производительность, долговечность и надежность оборудования, а также качество продукции и условия труда человека-оператора.

2. Анализ колебательных процессов показал, что между колебаниями разной физической природы очень много общего. Конкретные колебательные системы, с которыми приходится иметь дело специалистам в технике, совершенно различны, однако колебательно-волновые явления и процес-

сы, в них происходящие, подчиняются общим закономерностям и описываются едиными колебательными моделями. Это позволяет выделить их изучение в отдельную дисциплину – прикладную теорию колебаний (ПТК). Знание основ теории колебаний совершенно необходимо для пополнения теоретического багажа инженера-механика любого профиля, поэтому основы теории колебаний включены в учебные планы технических вузов.

Предметом ПТК является исследование методами математического и физического описания, экспериментального исследования и моделирования колебательных процессов в различных технических устройствах.

Цель изучения дисциплины ПТК – создание теоретической основы для решения прикладных технических задач.

Для специалистов в области наземных транспортно-технологических систем и комплексов *основными прикладными задачами* являются:

- а) устранение аварийных режимов в машинах:
исходя из резонансных состояний системы;
исходя из усталостных напряжений системы, усталостных разрушений при циклических нагрузках;
- б) обеспечение нормальных условий работы машин, механизмов, аппаратов, приборов и другого оборудования;
- в) защита человека (оператора) от вредного воздействия вибраций и шумов;
- г) использование колебаний для осуществления технологических и транспортных операций.

ГЛАВА 1. КЛАССИФИКАЦИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ И КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

В технике приходится сталкиваться в основном с тремя видами колебательных процессов: механическими, электрическими, электромеханическими.

Предметом данного курса ПТК являются механические колебания.

Механические колебания – это повторяющиеся ограниченные механические движения механической системы относительно некоего среднего состояния, которое в частном случае может быть состоянием равновесия.

Система, которая совершает колебания, называется *осциллятором*.

1.1. Классификация колебаний по кинематическому признаку

1. Периодические колебания – колебания, при которых состояние системы повторяется через равные промежутки времени.

То есть любые значения колеблющейся величины x повторяются через равные промежутки времени $t = T$:

$$x(t) = x(t + T) = x(t + 2T) = \dots = x(t + nT),$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ – целое число.

Период колебаний T – наименьший промежуток времени, по истечении которого состояние системы повторяется.

Строгой периодичности в реальных колебательных системах не наблюдается: периодические колебания – это физическая идеализация.

К наиболее распространенным периодическим колебаниям относятся *гармонические, ангармонические периодические и релаксационные периодические колебания*.

Гармонические колебания – периодические колебания, в которых зависимость колеблющейся величины от времени выражается функцией \sin или \cos .

Гармоническое колебание величины x описывается уравнением типа

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где A – амплитуда колебаний; ω – циклическая частота; t – текущее время; аргумент периодической функции $(\omega t + \varphi_0)$ – фаза колебания в момент времени t ; φ_0 – начальная фаза колебания.

График гармонических колебаний представлен на рис. 1.1.

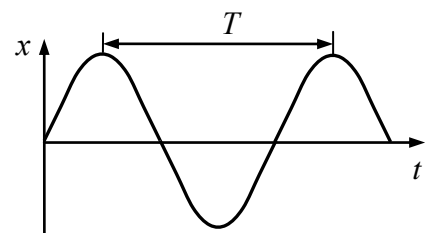


Рис. 1.1

Многие колебательные процессы с хорошим приближением описываются функциями \sin или \cos .

Ангармонические периодические колебания – периодические колебания, отличающиеся по форме от гармонических колебаний. Примеры ангармонических колебаний представлены графически на рис. 1.2.

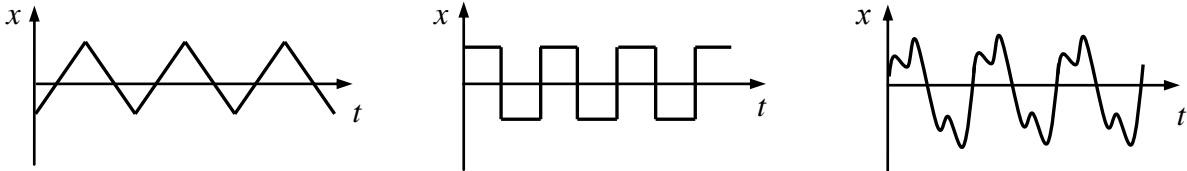


Рис. 1.2

Релаксационные периодические колебания – периодические колебания, возникающие в системах, в которых существенную роль играют диссипативные силы. Примеры релаксационных колебаний представлены графически на рис. 1.3.



Рис. 1.3

2. Аперiodические (непериодические) колебания. Реальные колебательные процессы всегда в той или иной степени непериодические. Примерами аперiodических колебаний являются *квазипериодические* и *хаотические непериодические* колебания.

Квазипериодические колебания (условно периодические) – колебания, которые в течение длительного времени сохраняют основные характеристики процесса (например, период) при медленном изменении их параметров (например, амплитуды). Это могут быть как нарастающие, так и затухающие (рис. 1.4) почти периодические колебания.

Хаотические непериодические колебания (рис. 1.5) – колебания, при которых состояние системы повторяется, но не через равные промежутки времени.

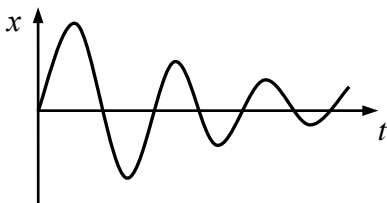


Рис. 1.4

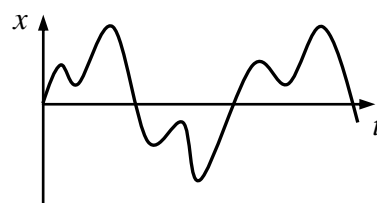


Рис. 1.5

1.2. Классификация колебаний по виду возбуждения колебаний

1. Свободные (собственные) колебания – колебания, возникающие в системах, не подверженных действию переменных внешних сил, за счет сообщенной в начальный момент времени энергии:

потенциальной энергии – при отклонении системы от положения устойчивого равновесия в начальный момент времени: $x_0 \neq 0$ (рис. 1.6);

кинетической энергии – при сообщении системе в положении устойчивого равновесия начальной скорости: $v_0 \neq 0$ (рис. 1.7);

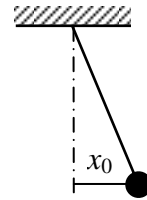


Рис. 1.6

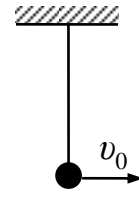


Рис. 1.7

потенциальной и кинетической энергии одновременно – при отклонении системы от положения устойчивого равновесия в начальный момент времени и сообщении системе начальной скорости: $v_0 \neq 0$ и $x_0 \neq 0$.

2. Вынужденные колебания – колебания, вызванные и поддерживаемые зависящим от времени переменным внешним воздействием.

При силовом возбуждении к системе приложена переменная внешняя сила, зависящая от времени $F = F(t)$.

При кинематическом возбуждении какая-либо точка (или сечение) принудительно перемещается по заданному закону движения $x = x(t)$.

При инерционном возбуждении возмущающая сила является следствием периодического ускоренного движения механизма или неуравновешенных частей механизма.

При вынужденных колебаниях период колебаний T определяется внешней силой, это основной признак вынужденных колебаний.

3. Параметрические колебания – колебания, вызванные и поддерживаемые изменением во времени одного или нескольких параметров системы (длины, массы, момента инерции, коэффициента жесткости и др.).

4. Автоколебания – установившиеся колебания, которые возникают в системе при неколебательном источнике энергии или источнике энергии с существенно отличающейся частотой и регулируются движением самой системы. Например: часовой механизм, смычковый музыкальный инструмент и т.д.

При собственных колебаниях и при автоколебаниях период колебаний определяется свойствами самой системы, эти колебания называют *автономными*.

1.3. Классификация колебаний по виду движения

1. Продольные колебания – колебательные движения, описываемые законом $x = x(t)$, где x – линейная координата (рис. 1.8).

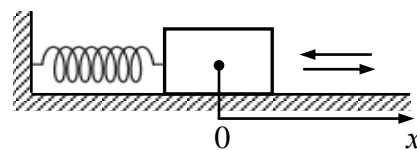


Рис. 1.8

2. Крутильные колебания – колебательные движения, описываемые законом $\alpha = \alpha(t)$, где α – угол поворота (рис. 1.9).

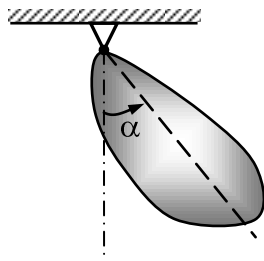
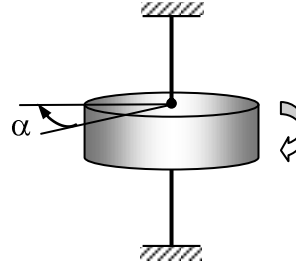


Рис. 1.9



3. Изгибные колебания – колебания, связанные с изгибной деформацией балок, стержней, пластин. Например, колебания груза на несущих балках (рис. 1.10).

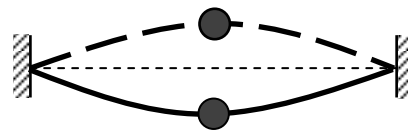
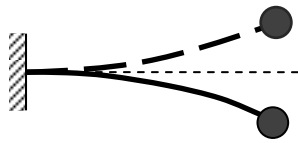


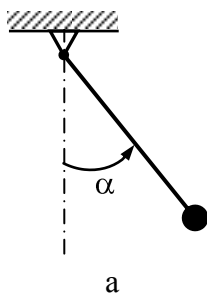
Рис. 1.10

1.4. Классификация колебаний по виду динамической модели

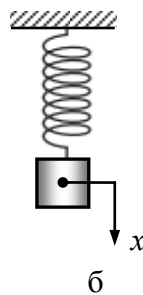
1. С одной степенью свободы ($s = 1$) – одномерный осциллятор.

Число степеней свободы s – число независимых координат, однозначно определяющих положение точек механической системы.

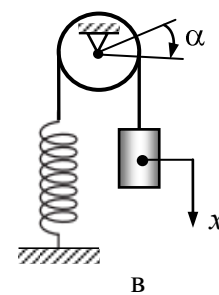
Примеры одномерных осцилляторов приведены на рис. 1.11.



а



б



в

Рис. 1.11

Положение математического маятника (рис. 1.11а) определяется углом поворота α , положение пружинного маятника (рис. 1.11б) – линейной координатой x . Система, изображенная на рис. 1.11в, также обладает одной степенью свободы, так как значение координаты x однозначно определяет координату α .

2. С конечным числом степеней свободы. На рис. 1.12 представлены колебательные системы с двумя степенями свободы ($s = 2$).

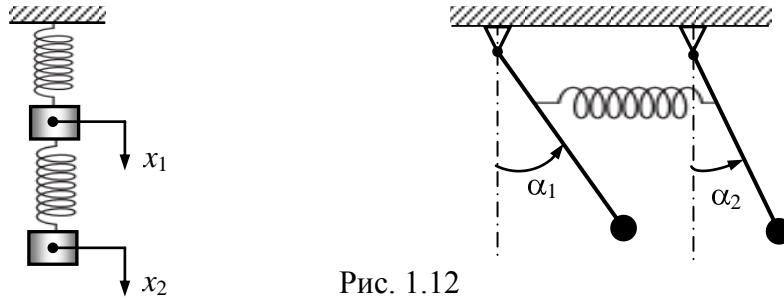


Рис. 1.12

3. С бесконечным числом степеней свободы (с распределенными параметрами). Например, колебания балки, струны (рис. 1.13).

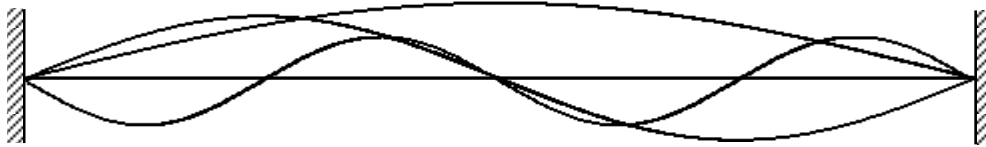


Рис. 1.13

1.5. Классификация колебаний по виду математической модели

1. Линейные колебания – колебания, описываемые линейными дифференциальными уравнениями вида

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f \cos(\omega t),$$

где x – обобщенная координата; \dot{x} и \ddot{x} – первая и вторая производные обобщенной координаты по времени; a, b, c, f – константы; ω – циклическая частота; t – время.

Характеристики линейной колебательной системы (например, частота и амплитуда) не зависят от ее состояния.

2. Нелинейные колебания – колебания, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями.

Все реальные колебательные системы нелинейны. Линейная система – это физическая идеализация. Теория нелинейных колебаний очень сложна, и эти колебания не до конца изучены. Поэтому для теоретического описания нелинейных колебаний их часто сводят к линейным колебаниям.

1.6. Классификация колебаний по энергетическому признаку

1. Колебания в консервативных системах. В консервативных системах действуют потенциальные (консервативные) силы. Механическая энергия консервативной системы сохраняется неизменной в процессе движения.

2. Колебания в неконсервативных (диссипативных) системах. Диссипативной называется система, механическая энергия которой преоб-

разуется в другие (немеханические) виды энергии в результате действия диссипативных сил. К диссипативным силам относятся, например, силы кулоновского или вязкого трения.

3. Колебания в активных системах. Активной называют систему, в которой потери энергии восполняются за счет внутреннего источника энергии (например, при автоколебаниях).

В реальных механизмах, которые приходится конструировать и рассчитывать, присутствуют сочетания различных видов колебаний. Объединяя колебания по разным признакам, получим, например, периодические вынужденные колебания системы с одной степенью свободы; периодические нелинейные автоколебания и др.

Еще раз подчеркнем, что в реальных механизмах и машинах не бывает строго гармонических колебаний, точно консервативных систем и колебаний, безупречно описываемых линейными уравнениями. Это все в той или иной степени физическая идеализация.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется осциллятором?
2. На какие виды подразделяются колебания по кинематическому признаку?
3. На какие виды подразделяются колебания по виду возбуждения колебаний?
4. На какие виды подразделяются колебания по виду движения?
5. Что называется числом степеней свободы колебательной системы?
6. На какие виды подразделяются колебания по виду динамической модели?
7. Запишите линейное дифференциальное уравнение в общем виде.
8. На какие виды подразделяются колебания по виду математической модели?
9. На какие виды подразделяются колебания по энергетическому признаку?
10. При каких условиях можно считать колебания математического маятника собственными линейными гармоническими незатухающими колебаниями?

ГЛАВА 2. СТРУКТУРА ДИНАМИЧЕСКОГО РАСЧЕТА КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Вы уже знакомы с расчетом собственных гармонических колебаний простейших идеализированных систем – математического или пружинного маятников. Сложность анализа колебаний возрастает вместе со сложностью механизма. Соответственно возрастает и сложность необходимого для анализа математического аппарата. Основным этапом решения любой инженерной практической задачи является выбор расчетной схемы.

Динамический расчет, объектом которого служит реальная механическая колебательная система, состоит из ряда этапов (рис. 2).

Этап 1. Изучение и анализ реального физического объекта (ФО) – механизма, системы, процесса.

Этап 2. Построение динамической модели (ДМ) – замена реального объекта адекватной упрощенной схемой, способной дать правильное качественное и количественное (в рамках разумной степени точности) описание объекта при заданных условиях.

Второй этап связан с физической идеализацией, в которой воспроизводят не все свойства объекта, а стремятся отобразить наиболее существенные для решаемой задачи факторы и отбросить несущественные. Одному и тому же объекту может соответствовать множество моделей, каждая из которых остается ограниченной.

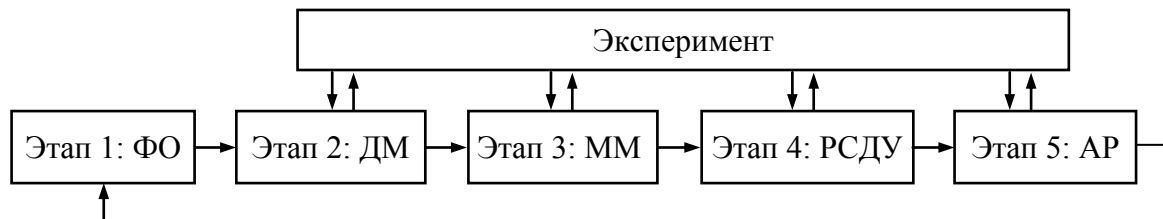


Рис. 2

Этап 3. Построение математической модели (ММ) – математическое описание динамической модели адекватной системой уравнений (как правило, дифференциальных), при составлении которых используются законы механики и экспериментальные данные. Иногда при этом приходится привлекать на помощь некоторые гипотезы и допущения для компенсации недостатка знаний или с целью упрощения дальнейшего анализа.

Этап 4. Решение систем дифференциальных уравнений (РСДУ) с помощью аналитических и (или) численных методов.

Этап 5. Анализ полученных решений (АР) с позиций поставленной задачи. По результатам анализа делаются соответствующие выводы и даются рекомендации. На базе анализа нередко удается сформулировать оптимизационную задачу, например, снижения виброактивности механизмов или более эффективного использования колебаний в технологическом процессе.

Физический эксперимент – единственный критерий адекватности, правильности выбранной динамической и математической модели.

Вопросы для самоконтроля

1. Охарактеризуйте основные этапы динамического расчета.
2. Что понимают под динамической моделью?
3. Что является критерием адекватности построенной динамической модели?

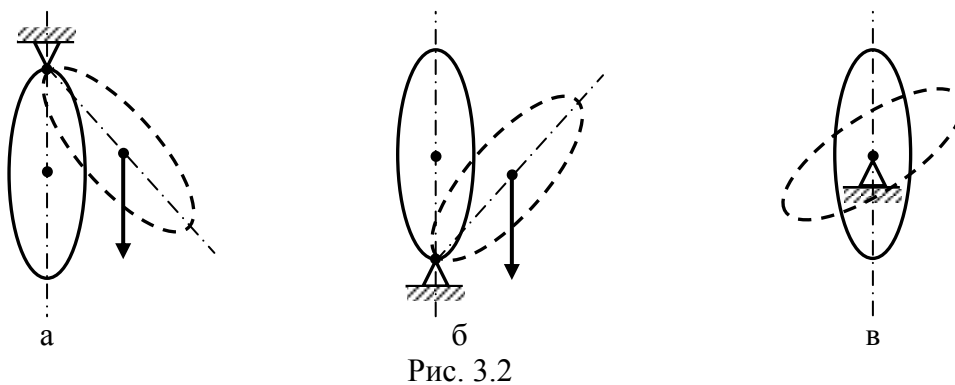
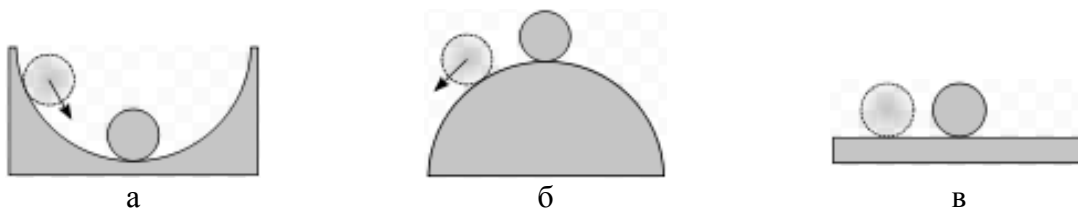
ГЛАВА 3. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСЕРВАТИВНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОЛОЖЕНИЯ УСТОЙЧИВОГО РАВНОВЕСИЯ

3.1. Три случая равновесия механической системы

В механике различают три состояния равновесия системы: устойчивого равновесия; неустойчивого равновесия; безразличного равновесия.

Тело находится в состоянии *устойчивого равновесия*, если при малых отклонениях системы из положения равновесия возникают силы, стремящиеся вернуть тело в равновесное состояние. Такие силы называют *восстанавливающими*, или *возвращающими*.

Примеры устойчивого равновесия: шар, находящийся на дне сферического углубления (рис. 3.1а); физический маятник – твердое тело, подвешенное на горизонтальной оси, проходящей через точку, расположенную выше центра тяжести тела (рис. 3.2а).



Тело находится в состоянии *неустойчивого равновесия*, если при малом отклонении системы из положения равновесия возникают силы, стремящиеся увеличить это отклонение. Такие силы называют *дестабилизирующими*.

Примеры неустойчивого равновесия: шар, находящийся в верхней точке сферического выступа (см. рис. 3.1б); перевернутый физический маятник – твердое тело, подвешенное на горизонтальной оси, проходящей через точку, расположенную ниже центра тяжести тела (см. рис. 3.2б).

Равновесие является *безразличным*, если при малом отклонении тело переходит в новое состояние равновесия. Восстанавливающие и дестабилизирующие силы при этом не возникают.

Примеры безразличного равновесия: шар, лежащий на плоской горизонтальной поверхности (см. рис. 3.1в); твердое тело, подвешенное на горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести тела (см. рис. 3.2в).

Свободные колебания возникают в устойчивых системах при отклонении от положения устойчивого равновесия в результате действия восстанавливающих сил.

3.2. Действие восстанавливающей квазиупругой силы при отклонении устойчивой системы от положения равновесия

Рассмотрим консервативную механическую систему, положение каждой точки которой однозначно задается одной обобщенной координатой x , то есть число степеней свободы $s = 1$.

Потенциальная энергия такой системы является функцией одной переменной – обобщенной координаты: $E_p = E_p(x)$.

Согласно принципу Лагранжа – Дирихле, положение устойчивого равновесия в поле консервативных сил соответствует минимуму потенциальной энергии. Если функция $E_p(x)$ (потенциальная кривая) в какой-либо точке проходит через минимум, то в соответствующем ей положении система находится в состоянии устойчивого равновесия.

Условимся отсчитывать координату x и потенциальную энергию E_p от положения устойчивого равновесия, то есть в точке устойчивого равновесия $x = 0$ и $E_p(0) = 0$.

Примеры потенциальных кривых $E_p(x)$ представлены на рис. 3.3. В общем случае функция $E_p = E_p(x)$ может быть как симметричной относительно $x = 0$, так и несимметричной.

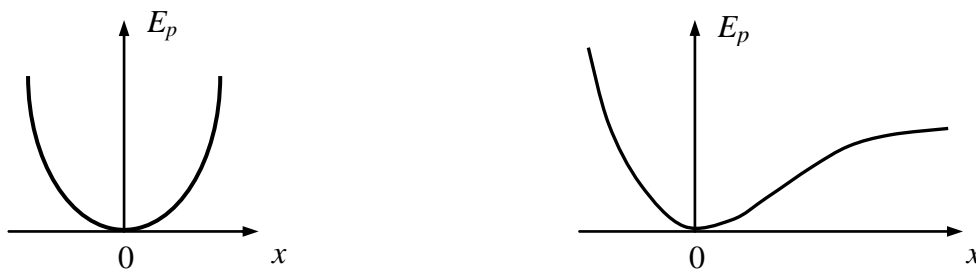


Рис. 3.3

Условие минимума потенциальной энергии определяется на основе соответствующих теорем математического анализа о необходимых и достаточных условиях существования экстремума функции одной переменной:

$$\frac{dE_p}{dx}(0) = 0, \quad \frac{d^2E_p}{dx^2}(0) > 0. \quad (3.1)$$

Разложим функцию $E_p(x)$ в ряд по степеням по формуле Маклорена:

$$E_p = E_p(0) + \frac{dE_p}{dx}(0)x + \frac{1}{2} \frac{d^2E_p}{dx^2}(0)x^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3E_p}{dx^3}x^3 + \dots \quad (3.2)$$

Рассмотрим малые колебания, то есть ограничимся первыми тремя членами разложения, пренебрегая высшими степенями x . Учитывая, что $E_p(0) = 0$ и $\frac{dE_p}{dx}(0) = 0$, из степенного ряда (3.2) получим выражение для потенциальной энергии:

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{d^2E_p}{dx^2}(0)x^2.$$

Обозначим $k = \frac{d^2E_p}{dx^2}(0)$, где коэффициент $k > 0$ (согласно формуле (3.1)), и перепишем выражение потенциальной энергии в виде

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2. \quad (3.3)$$

Используя дифференциальную связь между консервативной силой и потенциальной энергией:

$$F = -\text{grad } E_p = -\frac{dE_p}{dx} = -kx,$$

определим из выражения (3.3) силу в проекции на ось координат x .

Проанализируем полученное выражение для силы:

$$F = -kx. \quad (3.4)$$

Если $x > 0$, то $F < 0$; если $x < 0$, то $F > 0$, то есть сила направлена к положению равновесия – это *восстанавливающая сила*.

Восстанавливающая сила может иметь различную физическую природу. Но вид зависимости (3.4) соответствует силе упругости. Сила упругости по модулю прямо пропорциональна координате. Силы любой другой физической природы, удовлетворяющие этому условию, называются *квазиупругими*. Коэффициент $k = \frac{d^2E_p}{dx^2}(0)$ – коэффициент квазиупругой силы, в частном случае коэффициент упругости.

Можно считать, что при малых смещениях консервативной механической системы от положения устойчивого равновесия в системе возникают упругие или квазиупругие восстанавливающие силы, прямо пропорциональные смещению. В результате действия этих сил, как мы покажем в следующем разделе, система будет совершать свободные колебания около равновесного положения.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют положением устойчивого равновесия механической системы? Приведите примеры механических систем с устойчивым состоянием равновесия.
2. Какие движения совершает механическая система при малых отклонениях от положения устойчивого равновесия?
3. Какое состояние равновесия системы называется неустойчивым, безразличным? Приведите примеры механических систем с различными состояниями равновесия.
4. Какие силы называются восстанавливающими, дестабилизирующими?
5. Какие силы называются квазиупругими?
6. Каков вид зависимости квазиупругой силы от обобщенной координаты?
7. Что называется коэффициентом квазиупругой силы?

ГЛАВА 4. ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Проведем динамический анализ колебательной системы для наглядности на примере простейшей консервативной системы с одной степенью свободы. Рассмотрим колебания детали, соединенной с корпусом при помощи упругого элемента, например тележки сейсмографа. Анализ будем проводить поэтапно.

Этап 1. Анализ физического объекта. Физический объект – тело, способное колебаться на упругом элементе (рис. 4а).

Этап 2. Построение динамической модели. Сделаем допущения: массой пружины можно пренебречь; тело абсолютно твердое, m – масса тела; пружина абсолютно упругая, k – жесткость пружины; трение между поверхностями тела и корпуса отсутствует, система консервативная; колебания строго продольные, состояние системы однозначно задается одной координатой x , то есть система с одной степенью свободы.

Этап 3. Построение математической модели. Начало оси x совместим с центром масс C тела при недеформированной пружине, то есть с положением устойчивого равновесия (см. рис. 4а). Сместим тело из положе-

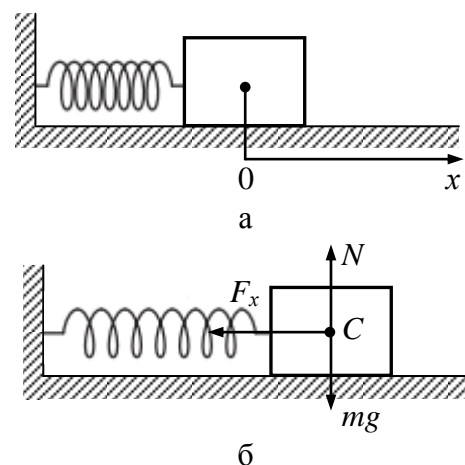


Рис. 4

ния равновесия. Покажем действующие на него силы: силу тяжести $m\vec{g}$; силу нормального давления \vec{N} ; силу упругости \vec{F} (см. рис. 4б).

Запишем уравнение движения тела на основе 2-го закона Ньютона:

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

Уравнение движения тела в проекции на ось x имеет вид

$$ma_x = F_x.$$

Ускорение a_x равно второй производной от координаты x по времени: $a_x = \ddot{x}$. Сила упругости $F_x = -kx$, где x – отклонение системы от положения равновесия. С учетом этих факторов уравнение движения примет дифференциальный вид:

$$m\ddot{x} = -kx.$$

Приведем дифференциальное уравнение к стандартному виду:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (4.1)$$

где циклическая частота

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (4.2)$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением движения. Это линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Этап 4. Решение системы уравнений. Решение дифференциального уравнения будем проводить в два этапа. Сначала получим комплексное решение, затем преобразуем его в вещественное.

1. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами решают с помощью подстановки. Решение уравнения (4.1) будем искать в виде

$$x(t) = e^{\lambda t},$$

где λ – постоянная величина. В результате дифференцирования функции $x(t)$ по времени получим выражения для скорости и ускорения:

$$\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}, \quad \ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Подстановка выражений x и \ddot{x} в уравнение (4.1) приводит после сокращения на множитель $e^{\lambda t}$ к характеристическому уравнению:

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0.$$

Это уравнение имеет два мнимых корня:

$$\lambda_1 = +i\omega_0, \quad \lambda_2 = -i\omega_0,$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Если корни уравнения не совпадают ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), то функции

$$x_1 = e^{\lambda_1 t}, \quad x_2 = e^{\lambda_2 t}$$

будут линейно независимыми частными решениями.

В этом случае общее решение уравнения можно представить через частные решения в виде

$$x = c_1^* x_1 + c_2^* x_2 = c_1^* e^{\lambda_1 t} + c_2^* e^{\lambda_2 t},$$

где c_1^* и c_2^* – две постоянные. Подставим λ_1 и λ_2 , получим:

$$x = c_1^* e^{i\omega_0 t} + c_2^* e^{-i\omega_0 t}. \quad (4.3)$$

Решение дифференциального уравнения (4.1) в комплексном виде (уравнение (4.3)) является кинематическим уравнением движения.

2. Чтобы заменить комплексный вид решения вещественным, используем формулу Эйлера:

$$e^{i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t),$$

$$e^{-i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) - i \sin(\omega_0 t).$$

Данные выражения подставим в формулу (4.3), получим уравнение колебаний в виде

$$x = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t), \quad (4.4)$$

где c_1 и c_2 – две постоянные интегрирования.

Дифференцируя полученное решение по времени, получим второе уравнение для определения постоянных c_1 и c_2 в виде зависимости скорости \dot{x} от времени:

$$\dot{x} = -\omega_0 c_1 \sin(\omega_0 t) + c_2 \omega_0 \cos(\omega_0 t). \quad (4.5)$$

Подставив *начальные условия* (в начальный момент времени $t = 0$ начальная координата $x(0) = x_0$, начальная скорость $v_{0x} = \dot{x}(0) = \dot{x}_0$) в формулы (4.4) и (4.5), получим выражения для начальной координаты и начальной скорости:

$$x_0 = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0,$$

$$\dot{x}_0 = -\omega_0 c_1 \cdot 0 + c_2 \omega_0 \cdot 1.$$

Из решения этой системы уравнений следует, что

$$c_1 = x_0, \quad c_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}. \quad (4.6)$$

Подставив c_1 и c_2 в выражение (4.4), получим уравнение колебаний:

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t), \quad (4.7)$$

где x_0 и \dot{x}_0 – начальная координата и начальная скорость соответственно; циклическая частота $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Для большей физической наглядности уравнение колебаний (4.4) можно представить *в амплитудной форме*.

Проведем математические преобразования выражения (4.4) с применением тригонометрических формул и следующих обозначений:

$$\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \cos \varphi_0, \quad \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = -\sin \varphi_0. \quad (4.8)$$

Умножим уравнение (4.4) на $\frac{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$, получим:

$$x = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \left[\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \cos(\omega_0 t) + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \sin(\omega_0 t) \right].$$

Перепишем это выражение с учетом введенных обозначений (4.8):

$$x = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} [\cos(\omega_0 t) \cos \varphi_0 - \sin(\omega_0 t) \sin \varphi_0],$$

где в квадратных скобках стоит выражение косинуса суммы двух углов:

$$x = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (4.9)$$

Так как координата x изменяется по закону косинуса, то уравнение (4.9) является уравнением гармонических колебаний с амплитудой колебаний $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ или с учетом постоянных c_1 и c_2 (см. формулы (4.6)):

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}}. \quad (4.10)$$

Начальную фазу также можно определить по значениям начальной координаты x_0 и начальной скорости \dot{x}_0 , используя выражения (4.8) и (4.6):

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi_0} = -\frac{\dot{x}_0}{x_0 \omega_0}. \quad (4.11)$$

Следует отметить, что уравнение для $\operatorname{tg} \varphi_0$ математически удовлетворяет двум значениям φ_0 в принятом для начальной фазы интервале $-\pi \leq \varphi_0 \leq \pi$. Физический смысл для колебательной системы имеет только одно значение φ_0 , при котором выполняются начальные условия с точностью до знаков «+» или «-» для координаты и скорости.

Этап 5. Анализ решения. Из анализа полученного решения (4.9) следует, что малые свободные движения консервативной механической системы около устойчивого положения равновесия являются гармоническими колебаниями.

Амплитуда A и начальная фаза φ_0 зависят от начальных условий: начальной координаты x_0 и начальной скорости \dot{x}_0 (см. формулы (4.10) и (4.11)). Амплитуда не зависит от времени, следовательно, колебания незатухающие.

Циклическая частота ω_0 зависит от параметров системы: k – коэффициента жесткости пружины; m – массы тела (см. формулу (4.2)).

Вопросы для самоконтроля

1. Приведите вывод дифференциального уравнения свободных незатухающих колебаний.
2. Какую роль играют начальные условия при решении дифференциального уравнения?
3. Запишите кинематическое уравнение свободных незатухающих колебаний в общем виде. Расшифруйте обозначения величин, входящих в это уравнение.
4. Запишите кинематическое уравнение свободных незатухающих колебаний в амплитудной форме. Расшифруйте обозначения величин, входящих в это уравнение.
5. От чего зависит циклическая частота ω_0 свободных незатухающих колебаний?
6. От чего зависит амплитуда A свободных незатухающих колебаний?
7. От чего зависит начальная фаза φ_0 свободных незатухающих колебаний?

ГЛАВА 5. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

5.1. Уравнение гармонических колебаний

Гармоническими колебаниями называются колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется по закону \sin или \cos .

Рассмотрение гармонических колебаний важно по двум причинам:

колебания в природе и технике часто имеют характер, близкий к гармоническому;

различные периодические колебания можно представить как результат наложения нескольких гармонических колебаний.

Уравнение гармонических колебаний в амплитудной форме имеет вид

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где используются обозначения:

x – отклонение колебательной системы от положения равновесия в момент времени t (обобщенная координата). В механических гармонических колебаниях x – это смещение системы от положения равновесия, соответствующего значению $x = 0$;

A – амплитуда колебаний – максимальное отклонение колеблющейся величины от положения равновесия: $A = x_{max}$. Амплитуда – постоянная положительная величина: $A > 0$. Величину $2A$ называют *размахом колебаний*;

$(\omega t + \varphi_0)$ – фаза колебаний – это аргумент периодической функции, то есть величина, стоящая под знаком косинуса. Фаза колебаний определяет состояние системы в момент времени t . Все точки системы с одной степенью свободы совершают колебания в одной фазе;

φ_0 – начальная фаза колебаний, то есть фаза колебаний в начальный момент времени $t = 0$. Значение φ_0 определяется выбором начала отсчета

времени. Так как состояние колебательной системы повторяется при приращении фазы, равном 2π , то следует рассматривать значения начальной фазы φ_0 , лежащие в интервале $-\pi \leq \varphi_0 \leq +\pi$;

ω – *циклическая (круговая) частота* колебаний. Единица циклической частоты $[\omega] = 1/\text{с} = \text{с}^{-1}$.

График гармонических колебаний показан на рис. 5.1 и представляет собой косинусоиду (синусоиду).

Состояние колебательной системы повторяется за промежуток времени, называемый *периодом колебаний* T , за который фаза колебаний получает приращение 2π , то есть

$$\omega(t + T) + \varphi_0 = (\omega t + \varphi_0) + 2\pi,$$

откуда после математических преобразований следует формула для периода колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Величина, обратная периоду колебаний, то есть число полных колебаний, совершаемых в единицу времени, называется *частотой колебаний*:

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Единица частоты колебаний $[\nu] = 1/\text{с} = \text{Гц}$.

Циклическая частота ω связана с частотой колебаний ν и периодом T соотношением

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}.$$

5.2. Скорость и ускорение при гармонических колебаниях

Запишем уравнение гармонических колебаний в виде

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (5.1)$$

где x – обобщенная координата. В механических колебаниях обобщенной координатой может являться как линейное смещение, так и угловое (угол поворота) от положения равновесия.

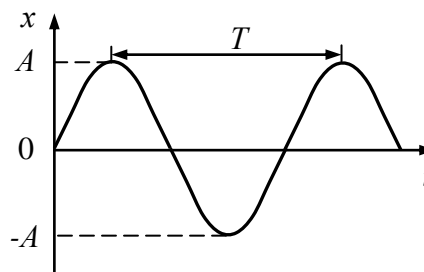


Рис. 5.1

Обобщенная скорость – это первая производная от обобщенной координаты по времени. Если в качестве обобщенной координаты выбрать угол, то под обобщенной скоростью следует понимать угловую скорость.

Продифференцировав уравнение (5.1) по времени, получим выражение для скорости:

$$\dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right). \quad (5.2)$$

Как видно из выражения (5.2), скорость также изменяется по гармоническому закону, причем *амплитуда скорости* равна

$$\dot{x}_m = A\omega. \quad (5.3)$$

Скорость принимает амплитудное значение в момент прохождения состояния равновесия. Из сравнения формул (5.1) и (5.2) следует, что обобщенная скорость (рис. 5.2б) опережает обобщенную координату (рис. 5.2а) по фазе на $\frac{\pi}{2}$, то есть на $\frac{1}{4}T$ по времени.

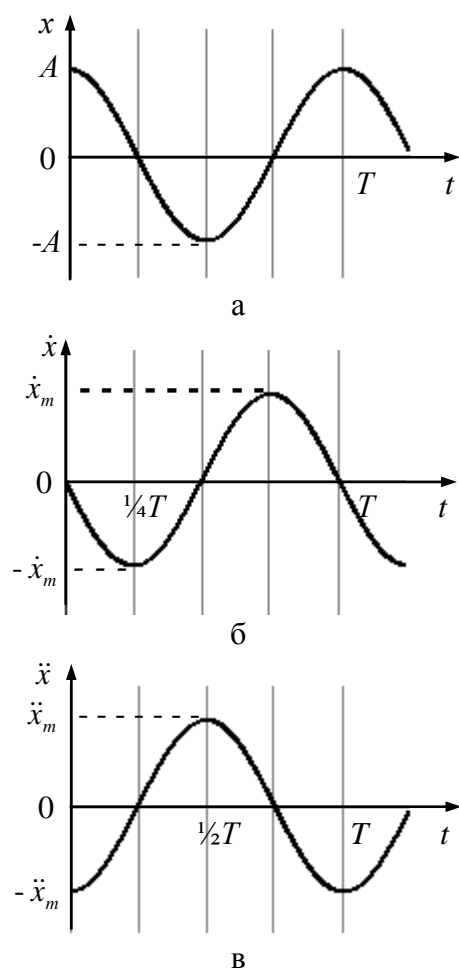


Рис. 5.2

Ускорение – это первая производная от обобщенной скорости по времени или вторая производная от обобщенной координаты по времени. Если в качестве обобщенной координаты выбрать угол, то под ускорением следует понимать угловое ускорение.

Продифференцировав уравнение (5.2) по времени, получим выражение для ускорения:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = \\ &= A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi) = -\omega^2 x. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Как видно из формулы (5.4), ускорение также изменяется по гармоническому закону, причем *амплитуда ускорения* равна

$$\ddot{x}_m = A\omega^2. \quad (5.5)$$

Ускорение принимает амплитудное значение в момент наибольшего смещения от состояния равновесия. Из сравнения выражений (5.1) и (5.4) следует, что колебания

ускорения (см. рис. 5.2в) и координаты (см. рис. 5.2а) происходят в противофазе, а именно: колебания ускорения опережают колебания координаты по фазе на π , то есть на $\frac{1}{2}T$ по времени.

5.3. Восстанавливающая сила

Восстанавливающая сила (обобщенная) – сила, возникающая при отклонении системы от состояния равновесия и направленная противоположно этому отклонению.

Если в качестве одной из обобщенных координат выбран угол, то роль восстанавливающей силы будет играть момент сил, возвращающий систему в положение равновесия.

Одним из примеров, когда возникает восстанавливающая сила, служит тело, закрепленное к концу цилиндрической пружины, другой конец которой неподвижен. Восстанавливающей силой является упругая сила пружины, пропорциональная деформации x (закон Гука):

$$F = -kx,$$

где k – коэффициент упругости пружины.

Если $x > 0$, то $F < 0$; если $x < 0$, то $F > 0$, то есть сила возвращает тело к положению равновесия, соответствующему $x = 0$.

Согласно формуле (4.2), коэффициент упругости пружины можно выразить через массу тела и циклическую частоту:

$$k = m\omega^2. \quad (5.6)$$

Подставив выражения (5.6) и (5.1) в закон Гука, получим:

$$F = -m\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0) = m\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi).$$

Такой же результат получим, если будем рассматривать 2-й закон Ньютона с учетом уравнения колебаний ускорения (5.4):

$$F = m\ddot{x} = -m\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0) = m\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi).$$

Как видно из полученной формулы, возвращающая сила изменяется по гармоническому закону, причем *амплитуда силы* равна

$$F = m\omega^2 A.$$

Сила, как и ускорение, принимает амплитудное значение в момент наибольшего смещения от положения равновесия.

5.4. Колебания энергии в гармоническом осцилляторе

Полная механическая энергия E_M системы, совершающей гармонические колебания, складывается из кинетической E_K и потенциальной E_P энергий:

$$E_M = E_K + E_P.$$

Так как восстанавливающая сила, действующая в гармоническом осцилляторе, является консервативной, то его механическая энергия остается постоянной. В процессе же колебаний происходит непрерывное и периодическое превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно. Например, при колебаниях пружинного, физического или математического маятников в крайних положениях потенциальная энергия максимальна, а при прохождении положения равновесия максимальна кинетическая энергия.

Найдем математические выражения для кинетической, потенциальной и полной механической энергий систем, совершающих гармонические колебания.

Запишем выражение для кинетической энергии, учитывая формулу (5.2), в виде

$$\begin{aligned} E_K &= \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2} = \\ &= \frac{m\omega^2 A^2}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2(\omega t + \varphi_0) \right]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Из анализа полученного выражения следует, что кинетическая энергия совершает гармонические колебания с частотой 2ω , то есть с частотой, в два раза превышающей частоту гармонических колебаний. Формула для амплитуды кинетической энергии имеет вид

$$E_{K \max} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}. \quad (5.8)$$

Потенциальная энергия обусловлена действием упругой (или квазиупругой) силы. Запишем выражение для потенциальной энергии, учитывая формулы (5.6) и (5.1), в виде

$$\begin{aligned} E_P &= \frac{kx^2}{2} = \frac{(m\omega^2)A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)}{2} = \\ &= \frac{m\omega^2 A^2}{2} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\omega t + \varphi_0) \right]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Из анализа полученного выражения следует, что потенциальная энергия, как и кинетическая, совершает гармонические колебания с частотой 2ω . Формула для амплитуды потенциальной энергии имеет вид

$$E_{P \max} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}. \quad (5.10)$$

Сложив выражения (5.7) и (5.9), получим формулу для полной энергии:

$$E_M = \frac{m\omega^2 A^2}{2}. \quad (5.11)$$

Полная механическая энергия системы, совершающей гармонические колебания, прямо пропорциональна ее массе, квадрату циклической частоты и квадрату амплитуды и не зависит от времени, то есть остается постоянной.

Величина полной энергии равна амплитудным значениям кинетической и потенциальной энергий (см. формулы (5.8), (5.10) и (5.11)):

$$E_M = E_{K \max} = E_{P \max} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}.$$

Графики колебаний координаты $x(t)$ и колебаний кинетической $E_K(t)$ и потенциальной $E_P(t)$ энергий сопоставлены на рис. 5.3.

Вычислим среднее за период значение кинетической энергии системы. По определению эта величина задается выражением

$$\langle E_K \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E_K dt.$$

Принимая во внимание выражение (5.7), находим:

$$\begin{aligned} \langle E_K \rangle &= \frac{1}{T} \frac{m\omega^2 A^2}{2} \int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi_0) dt = \\ &= \frac{1}{4} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} E_M, \end{aligned}$$

где использовано значение табличного интеграла $\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}$.

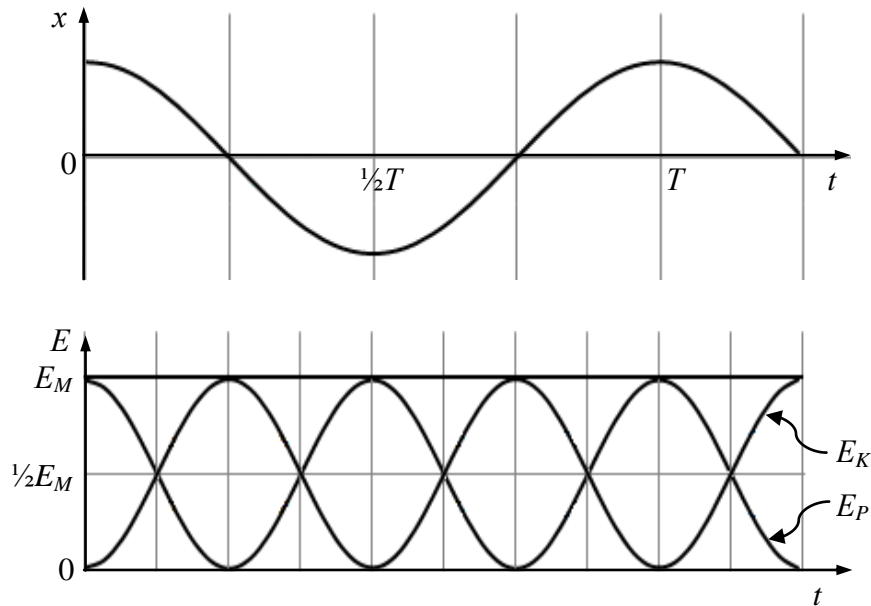


Рис. 5.3

Аналогично находим среднее за период значение потенциальной энергии системы с учетом (5.9):

$$\begin{aligned} \langle E_P \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T E_P dt = \frac{1}{T} \frac{m\omega^2 A^2}{2} \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi_0) dt = \\ &= \frac{1}{4} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} E_M, \end{aligned}$$

где использовано значение табличного интеграла $\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$.

Таким образом, получаем, что кинетическая и потенциальная энергии гармонического осциллятора колеблются с частотой 2ω в противоположных фазах около одинакового среднего значения, равного половине полной механической энергии системы (см. рис. 5.3).

5.5. Векторная диаграмма колебаний

Решение ряда вопросов, в частности сложение нескольких гармонических колебаний, значительно облегчается и становится наглядным, если изображать колебания графически в виде векторов на плоскости. Полученная таким образом схема называется векторной диаграммой.

Для построения векторной диаграммы (рис. 5.4) из точки O оси x откладывают вектор длины A , образующий с осью угол φ_0 . Если привести этот вектор во вращение против часовой стрелки с угловой скоростью ω ,

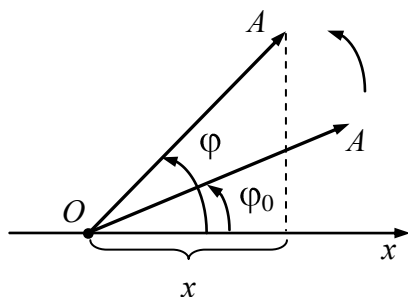


Рис. 5.4

то угол со временем будет меняться согласно уравнению $\varphi = \varphi_0 + \omega t$, а проекцию вектора на ось x (координату конца вектора) в момент времени t можно представить в виде

$$x = A \cos \varphi = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

который полностью идентичен уравнению (5.1) гармонических колебаний.

Следовательно, проекция вектора A на ось x совершает гармоническое колебание с амплитудой A , равной длине вектора, циклической частотой ω , равной угловой скорости вращения вектора, и начальной фазой φ_0 , равной углу, образуемому вектором с осью в начальный момент времени.

5.6. Сложение гармонических колебаний одного направления

Допустим, груз, подвешенный на пружине к потолку рессорного вагона, колеблется относительно точки подвеса, которая в свою очередь совершает колебания вместе с вагоном на его рессорах (рис. 5.5). Результирующее движение груза будет складываться из колебаний вагона и колебаний груза относительно вагона.

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты $\omega_1 = \omega_2 = \omega$.

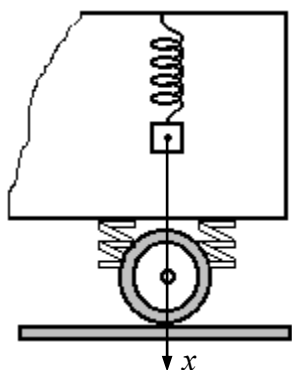


Рис. 5.5

Колебания груза на пружине совершаются по закону

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad (5.12)$$

а колебания вагона – по закону

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2), \quad (5.13)$$

где A_1 и A_2 , φ_1 и φ_2 – амплитуды и начальные фазы колебаний.

Представим оба колебания с помощью векторов и сложим их по правилу сложения векторов

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2.$$

Для этого изобразим векторы длиной A_1 и A_2 под углами φ_1 и φ_2 к оси x соответственно (рис. 5.6). Построим по правилу сложения векторов результирующий вектор. Получим вектор \vec{A} , расположенный под углом φ_0 к оси x .

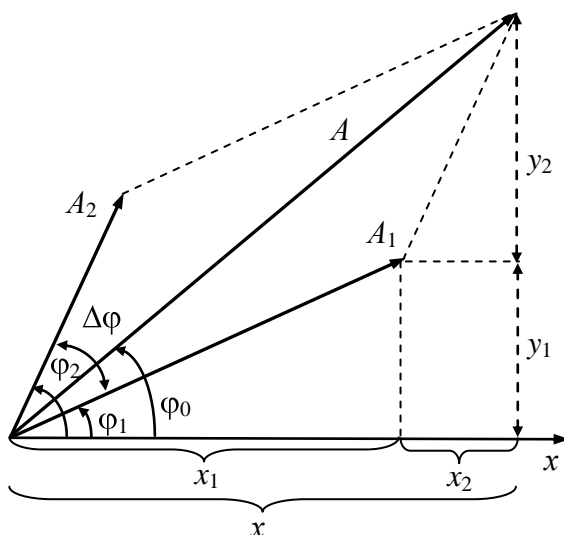


Рис. 5.6

Из рис. 5.6 видно, что при вращении все три вектора (\vec{A}_1 , \vec{A}_2 и \vec{A}) имеют одинаковую угловую скорость, их взаимное расположение не зависит от времени, разность фаз складываемых колебаний (на диаграмме угол между векторами \vec{A}_1 и \vec{A}_2) остается постоянной: $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \text{const}$. Следовательно, в любой момент времени проекция результирующего вектора на ось x равна сумме проекций слагаемых векторов:

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2),$$

и уравнение результирующего колебания имеет вид

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Таким образом, тело, участвуя в двух гармонических колебаниях одного направления и одинаковой частоты, совершает при этом также гармоническое колебание в том же направлении и с той же частотой ω , что и складываемые колебания.

Амплитуду и начальную фазу результирующего гармонического колебания можно найти из диаграммы колебаний, используя геометрические соотношения. В соответствии с рис. 5.6 и теоремой косинусов *амплитуда результирующего колебания*

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \quad (5.14)$$

Как видно из формулы, амплитуда результирующего колебания не зависит от времени. Амплитуда зависит от разности фаз складываемых колебаний, и ее значение лежит в интервале $|A_1 - A_2| \leq A \leq (A_1 + A_2)$.

Найдем начальную фазу результирующего колебания φ_0 , используя тригонометрические функции тангенса, синуса и косинуса (см. рис. 5.6):

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (5.15)$$

Формулы (5.14) и (5.15) можно получить, сложив выражения (5.12) и (5.13) и произведя соответствующие тригонометрические преобразования. Но примененный способ векторных диаграмм отличается большей простотой и наглядностью.

Если частоты складываемых колебаний неодинаковы, векторы \vec{A}_1 и \vec{A}_2 будут вращаться с различной скоростью. В этом случае результирующий вектор \vec{A} пульсирует по величине и вращается с непостоянной скоростью. Следовательно, результирующим движением будет не гармоническое колебание, а некоторый сложный колебательный процесс.

5.7. Сложение гармонических колебаний с близкими частотами. Биения

Особый интерес представляет случай, когда два складываемых гармонических колебания одного направления мало отличаются по частоте. Покажем, что результирующее движение в этом случае можно рассматривать как гармоническое колебание с пульсирующей амплитудой. Такое колебание называется биениями.

Биения – колебания с периодически изменяющейся амплитудой, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами.

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одного направления при условии: частота одного колебания ω_1 , второго колебания $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$, причем $\Delta\omega \ll \omega_1$. Тогда уравнения колебаний будут иметь вид:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1),$$

$$x_2 = A_2 \cos[(\omega_1 + \Delta\omega)t + \varphi_2].$$

Складывая эти выражения аналитически и применяя тригонометрическую формулу для суммы косинусов, получим, что результирующее колебание происходит по закону косинуса с частотой ω_1 :

$$x = x_1 + x_2 = A(t) \cos[\omega_1 t + \varphi(t)], \quad (5.16)$$

где амплитуда $A(t)$ и начальная фаза $\varphi(t)$ – меняющиеся функции с течением времени:

$$A(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos[\psi(t) - \varphi_1]}, \quad (5.17)$$

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \psi(t)}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \psi(t)},$$

$$\psi(t) = \varphi_2 + (\omega_2 - \omega_1)t.$$

Из полученных выражений видно, что величина амплитуды биений меняется в пределах $|A_1 - A_2| \leq A \leq (A_1 + A_2)$. Частота пульсаций амплитуды называется частотой биений и равна разности частот складываемых колебаний: $\omega_6 = \omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$. *Период биений* – промежуток времени между двумя соседними амплитудами биений (рис. 5.7а):

$$\tau_6 = \frac{2\pi}{\Delta\omega}.$$

График колебаний $x(t)$, описываемых формулой (5.16), изображен на рис. 5.7а, график колебаний амплитуды $A(t)$ согласно формуле (5.17) представлен на рис. 5.7б.

Рассмотрим упрощенный случай. Амплитуды обоих колебаний будем полагать одинаковыми и равными A , начальные фазы равны нулю. Тогда уравнения колебаний будут иметь вид:

$$x_1 = A \cos(\omega_1 t),$$

$$x_2 = A \cos(\omega_1 + \Delta\omega)t.$$

Складывая эти выражения аналитически и учитывая, что $\Delta\omega \ll \omega_1$, получим:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = A \cos(\omega_1 + \Delta\omega)t + A \cos(\omega_1 t) = \\ &= 2A \cos\left(\frac{\omega_1 + \Delta\omega - \omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \Delta\omega + \omega_1}{2}t\right) = \\ &= 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos(\omega_1 t). \end{aligned}$$

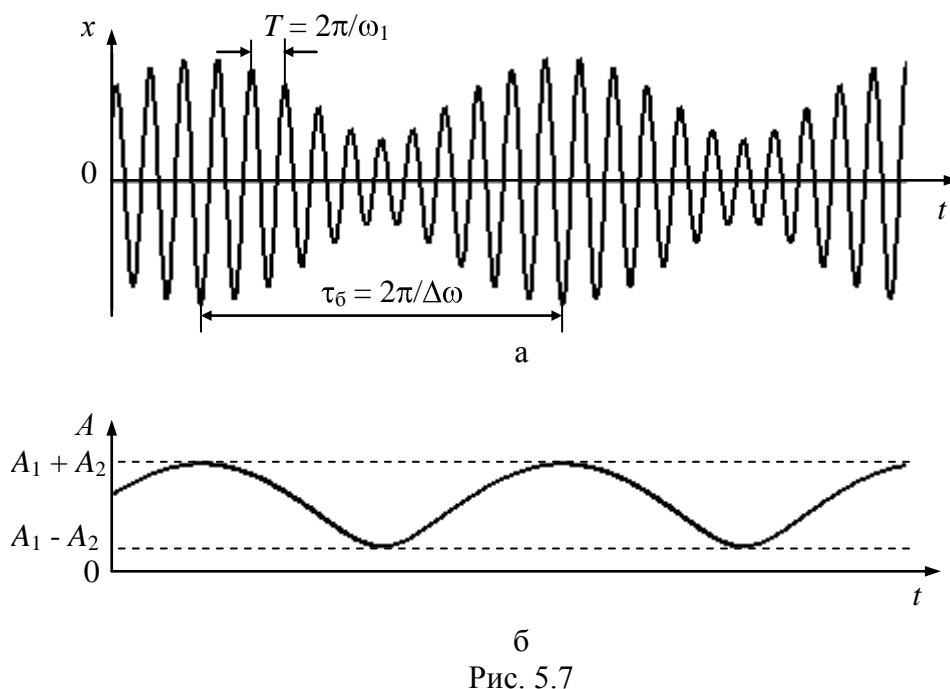


Рис. 5.7

То есть в этом случае биения описываются уравнением

$$x = \left[2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \right] \cos(\omega_1 t). \quad (5.18)$$

Заклученный в квадратные скобки множитель представляет собой амплитуду гармонических колебаний с частотой ω_1 . Амплитуда изменяется, но значительно медленнее (см. рис. 5.7б), чем второй сомножитель $\cos(\omega_1 t)$ (см. рис. 5.7а). Это связано с тем, что $\Delta\omega \ll \omega_1$, и за время, когда множитель $\cos(\omega_1 t)$ совершит несколько полных колебаний, имея период $T = 2\pi/\omega_1$, множитель в скобках мало изменится. Это дает основание биения считать условно гармоническим колебанием, амплитуда которого изменяется по некоторому периодическому закону.

Амплитуда по определению – положительная величина. Из выражения (5.18) следует, что амплитуда биений в этом случае изменяется по закону косинуса с периодом биений соответственно:

$$A_6 = \left| 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \right|, \quad \tau_6 = \frac{2\pi}{\Delta\omega}.$$

5.8. Гармонический анализ сложных периодических колебаний

Если частоты складываемых гармонических колебаний не равны друг другу $\omega_1 \neq \omega_2$, то результирующее колебание не будет гармоническим, а его амплитуда будет непостоянна. Такое колебание называется сложным.

Сложное негармоническое периодическое колебание с периодом T вида $x = x(t)$ можно представить в виде суммы простых гармонических колебаний (гармоник) с циклическими частотами, кратными основной циклической частоте $\omega = 2\pi/T$ разложением в ряд Фурье:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)), \quad (5.19)$$

где a_0 , a_n и b_n – коэффициенты Фурье; n – номер гармоники, причем первая гармоника носит название основной.

Выражение (5.19) в амплитудной форме имеет вид

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n).$$

Коэффициенты в этом выражении определяются по формулам:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_n = -\frac{b_n}{a_n},$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(n\omega t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(n\omega t) dt,$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$.

При $n = 0$ коэффициент A_n принимает вид

$$A_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt.$$

В большинстве случаев рассматривается негармоническое периодическое колебание $x(t)$, представленное в виде экспериментальных кривых, графиков или таблиц данных, и определяются коэффициенты Фурье приближенным образом, с помощью методов численного интегрирования. При разложении в ряд Фурье ограничиваются конечным числом членов разложения, то есть рассматривают ограниченное число гармоник. Разложение сложного колебания на составляющие его простые гармоники называется *гармоническим анализом*. Гармонический анализ позволяет детально проанализировать и описать любой сложный колебательный процесс. Он широко применяется в акустике и радиотехнике.

5.9. Фазовая диаграмма (фазовый портрет) колебательной системы

Рассмотрим еще один способ графического представления произвольных колебаний. Для наглядного представления и описания движения его изображают на фазовой плоскости. В нелинейных системах это мощный, а часто и единственный инструмент анализа колебаний.

Фазовая плоскость – система координат, в которой на оси абсцисс откладывается обобщенная координата x , а на оси ординат – обобщенная скорость \dot{x} .

Каждому состоянию системы на фазовой плоскости соответствует точка с координатами (x, \dot{x}) – *изображающая точка*.

В процессе движения системы величины x и \dot{x} изменяются и соответственно меняется положение изображающей точки на фазовой плоскости. С течением времени изображающая точка перемещается по фазовой плоскости по линии, называемой *фазовой траекторией*.

Найдем уравнение фазовой траектории для гармонических колебаний. Состояние колебательной системы в каждый момент времени можно охарактеризовать значениями координаты x и скорости \dot{x} , определяемыми соответствующими уравнениями:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$\dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Чтобы найти уравнение фазовой траектории, необходимо из данных уравнений исключить время t . Перепишем их в виде:

$$\frac{x^2}{A^2} = \cos^2(\omega t + \varphi_0),$$

$$\frac{\dot{x}^2}{A^2\omega^2} = \sin^2(\omega t + \varphi_0).$$

Сложив эти выражения, получим уравнение фазовой траектории:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{A^2\omega^2} = 1.$$

Это уравнение эллипса с полуосями A и $A\omega$ (рис. 5.8). За время, равное периоду колебаний, изображающая точка на фазовой траектории совершает один оборот. Скорость тела обращается в ноль ($\dot{x} = 0$) при максимальном смещении от положения равновесия ($x = A$). При прохождении

телом положения равновесия ($x = 0$) величина скорости приобретает максимальное значение ($\dot{x} = \dot{x}_m = A\omega$).

Совокупность фазовых траекторий образует *фазовую диаграмму* (*фазовый портрет*) данной системы (рис. 5.9). Так как площадь эллипса пропорциональна A^2 и энергия колебаний пропорциональна A^2 , следовательно, площадь характеризует величину энергии колебательной системы. Каждому эллипсу соответствует определенная величина энергии колебаний. Особая точка O – центр колебаний.

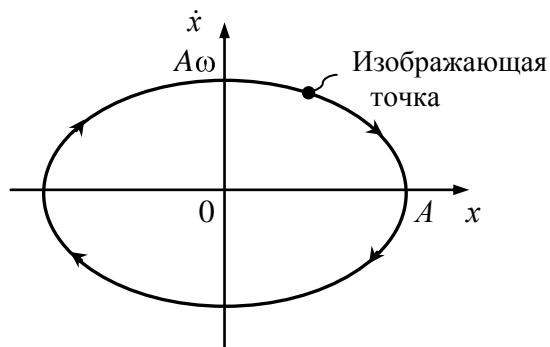


Рис. 5.8

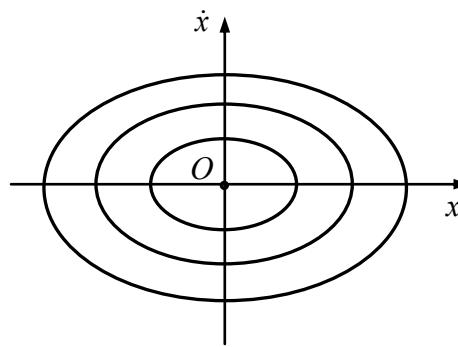


Рис. 5.9

По виду фазового портрета системы определяют особые точки и вид колебаний. Состояния равновесия и соответствующие им особые точки могут быть устойчивыми и неустойчивыми. Особая точка, вблизи которой фазовые траектории представляют собой замкнутые линии, в частности эллипсы, вложенные друг в друга и окружающие особую точку O , называется *центром* (см. рис. 5.9). Если особая точка есть центр, то при малых отклонениях от положения равновесия в системе возникают периодические незатухающие колебания, состояние равновесия является устойчивым.

Особая точка – *фокус*, если фазовые траектории имеют вид спиралей. Если изображающая точка, двигаясь по спирали, с течением времени приближается к началу координат, то имеем *устойчивый фокус* (рис. 5.10). В этом случае движение осциллятора имеет характер затухающих колебаний, состояние равновесия устойчиво. Если изображающая точка удаляется от начала координат, то имеем *неустойчивый фокус*. При малых отклонениях от положения равновесия движение имеет характер нарастающих колебаний, состояние равновесия неустойчиво.

Если особая точка есть *узел*, то фазовые траектории имеют вид парабол. В случае *устойчивого узла* фазовые траектории, соответствующие различным начальным данным, входят в начало координат (рис. 5.11). При отклонении от положения равновесия в системе имеет место аperiodический затухающий процесс, состояние равновесия устойчиво. Если особая точка – *неустойчивый узел*, то изображающая точка удаляется от начала координат. При отклонении от положения равновесия в системе имеет место аperiodический нарастающий процесс.

Особая точка носит название *седло*, если фазовые траектории имеют вид гипербол, вдоль ветвей которых изображающая точка сначала приближается к началу координат, а затем удаляется от него (рис. 5.12). В этом случае положение равновесия всегда неустойчиво, процесс представляет собой аperiодический уход от неустойчивого состояния равновесия.

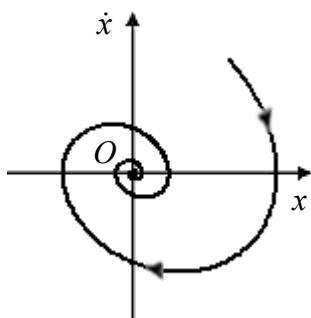


Рис. 5.10

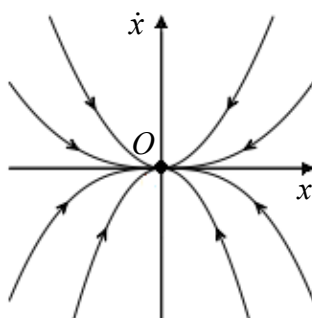


Рис. 5.11

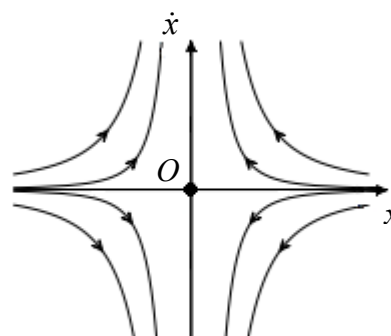


Рис. 5.12

Вопросы для самоконтроля

1. Что понимают под терминами «обобщенная координата» и «обобщенная скорость»?
2. Какие колебания называются гармоническими?
3. Запишите уравнение гармонических колебаний. Дайте определения всем величинам, входящим в это уравнение.
4. Что такое период, частота, циклическая частота гармонических колебаний? Какая между ними связь?
5. Чему равна амплитуда скорости?
6. Чему равна амплитуда ускорения?
7. Чему равна разность фаз колебаний координаты и скорости?
8. Чему равна разность фаз колебаний координаты и ускорения?
9. Что называется восстанавливающей силой?
10. Чему равна потенциальная энергия системы, совершающей гармонические колебания? Чему равно амплитудное значение потенциальной энергии?
11. Чему равна кинетическая энергия системы, совершающей гармонические колебания? Чему равно амплитудное значение кинетической энергии?
12. Чему равна полная механическая энергия системы, совершающей гармонические колебания?
13. Во сколько раз частота колебаний кинетической и потенциальной энергий отличается от частоты колебаний координаты?
14. Как сложить однонаправленные колебания с помощью метода векторных диаграмм? Когда амплитуда результирующего колебания максимальна, когда минимальна?
15. Запишите уравнение колебания, возникающего при сложении двух колебаний одного направления: $x_1 = \cos(\pi t)$, см; $x_2 = 2 \cos(\pi t + \pi/6)$, см. Постройте векторную диаграмму сложения амплитуд.
16. Что называется биениями? Изобразите биения графически.
17. Что называется периодом биения?
18. В каких пределах меняется амплитуда биений?

19. Как по картине биений установить, что амплитуды двух складываемых колебаний одинаковы?
20. При каком условии биения можно считать условно гармоническим колебанием?
21. В чем заключается гармонический анализ сложных периодических колебаний?
22. Что называется фазовой плоскостью, фазовой траекторией?
23. Изобразите и проанализируйте фазовую траекторию гармонических колебаний.
24. Что представляет собой фазовая диаграмма? Приведите примеры особых точек.

ГЛАВА 6. ПРИМЕРЫ ПРОСТЕЙШИХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Важной характеристикой любой колебательной системы является частота колебаний около положения равновесия. Для определения частоты используют два основных подхода: динамический и энергетический. Проведем анализ колебаний простейших идеализированных систем динамическим методом, то есть составлением дифференциальных уравнений с применением основного закона динамики поступательного или вращательного движения.

6.1. Пружинный маятник

Пружинным маятником называется система, состоящая из тела массой m , укрепленного на пружине с коэффициентом жесткости k .

Рассмотрим идеализированную систему: пружина невесомая, абсолютно упругая; силами сопротивления можно пренебречь.

Проведем анализ колебаний пружинного маятника в вертикальной плоскости (рис. 6.1). Для статического равновесия системы справедливо соотношение

$$mg - F_{\text{ст}} = 0,$$

где mg – сила тяжести; $F_{\text{ст}} = kx_{\text{ст}}$ – упругая сила ($x_{\text{ст}}$ – деформация пружины в состоянии равновесия). Следовательно:

$$mg = kx_{\text{ст}}. \quad (6.1)$$

Если тело сместить на величину x от положения равновесия, то на него будет действовать упругая сила $F = k(x + x_{\text{ст}})$ (рис. 6.1). Под действием этой силы маятник будет совершать свободные незатухающие колебания.

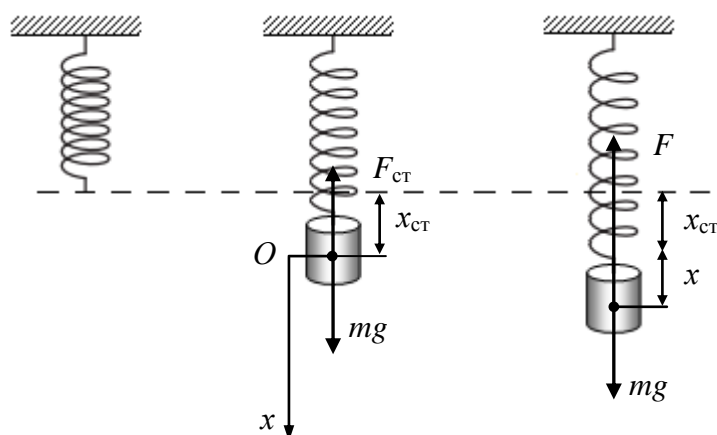


Рис. 6.1

Запишем уравнение движения (2-й закон Ньютона) тела в проекции на ось x :

$$m\ddot{x} = mg - k(x + x_{\text{ст}}),$$

или с учетом выражения (6.1)

$$m\ddot{x} = -kx. \quad (6.2)$$

Приведем дифференциальное уравнение (6.2) к стандартному виду:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (6.3)$$

где *собственная частота* и *период* колебаний соответственно равны:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (6.4)$$

Уравнение (6.3) является *дифференциальным уравнением свободных незатухающих колебаний*. Данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Решение такого уравнения записывается в общем виде и амплитудной форме соответственно:

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t), \quad x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (6.5)$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}}, \quad \text{tg } \varphi_0 = -\frac{\dot{x}_0}{x_0 \omega_0}, \quad (6.6)$$

где A и φ_0 – амплитуда и начальная фаза колебаний; x_0 и \dot{x}_0 – начальная координата и начальная скорость.

Амплитуда и начальная фаза колебаний зависят от начальных условий: начальной координаты x_0 и начальной скорости \dot{x}_0 (см. формулы 6.6).

Уравнение (6.5) является *уравнением гармонических колебаний* пружинного маятника.

Собственная частота и период зависят от параметров системы: массы тела и жесткости пружины (см. формулы (6.4)), то есть действующая постоянная статическая сила $F_{ст}$ на частоту и период колебаний не влияет. Сравнив формулы (6.4) и (4.2), можно сделать вывод о том, что частота и период не зависят от направления оси пружины (горизонтальное или вертикальное).

При действии постоянной (статической) силы $F_{ст}$ центр колебаний (точка O , см. рис. 6.1) смещается в сторону действия $F_{ст}$ на $x_{ст} = F_{ст}/k$. Колебания можно рассматривать относительно нового положения устойчивого равновесия.

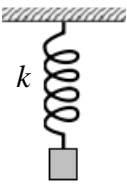
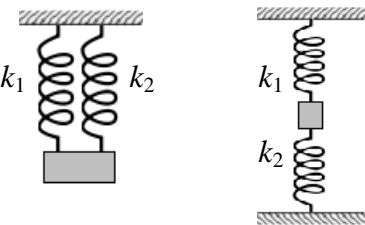
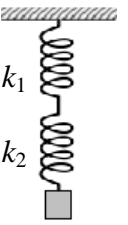
Уравнения частоты и периода (6.4) с учетом формулы (6.1) можно представить через $x_{ст}$:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{x_{ст}}}, \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{x_{ст}}{g}}.$$

В таком виде формулы более практичны, так как достаточно определить $x_{ст}$ экспериментально, не определяя массу тела и жесткость пружины.

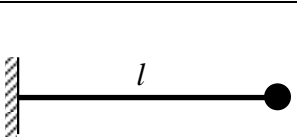
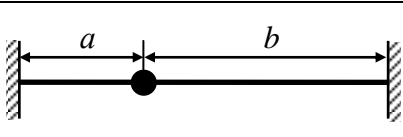
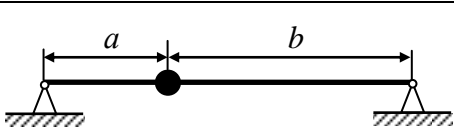
В табл. 6.1 и 6.2 приведены формулы для расчета коэффициентов жесткости для простых систем.

Таблица 6.1

Упругая пружина	Параллельное соединение пружин	Последовательное соединение пружин
		
$k = \frac{Gd^4}{8nD^3}$	$k = k_1 + k_2$	$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}, \quad k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$

В табл. 6.1 используются обозначения: G – модуль сдвига; d – диаметр проволоки; n – число витков; D – диаметр пружины. Для стали $G \approx 0,8 \cdot 10^{11}$ Па.

Таблица 6.2

Упругая балка с консольной заделкой		Упругая балка с шарнирной заделкой
		
$k = \frac{3EI_c}{l^3}$	$k = \frac{3EI_c(a+b)^3}{a^3b^3}$	$k = \frac{3EI_c(a+b)}{a^2b^2}$

В табл. 6.2 используются обозначения: l – длина балки; E – модуль Юнга; I_c – момент инерции поперечного сечения балки относительно центральной оси; EI_c – жесткость балки. Для стали $E \approx 2 \cdot 10^{11}$ Па

Пример на свободные колебания системы с линейным упругим элементом. Проведем аналогично динамический анализ колебаний корпуса автомобиля для нахождения его момента инерции относительно оси. Рассмотрим малые колебания корпуса автомобиля относительно поперечной оси, проходящей через ось заднего колеса (рис. 6.2), с частотой ω_0 . Расстояние между осями заднего и переднего колес – l , жесткость пружины (упругого элемента) – k .

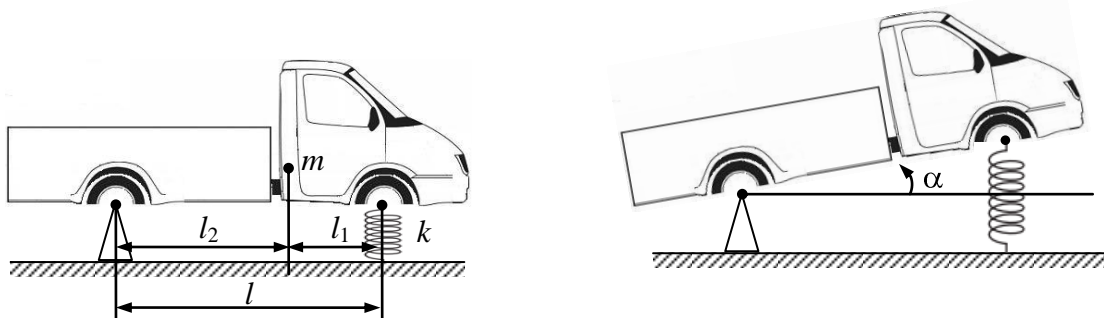


Рис. 6.2

Для статического равновесия системы справедливо соотношение

$$mgl_2 - kx_{ст}l = 0,$$

где первое слагаемое – момент силы тяжести; второе – момент упругой силы; l_2 – плечо силы тяжести; $x_{ст}$ – деформация пружины в состоянии равновесия; l – плечо упругой силы. Следовательно:

$$mgl_2 = kx_{ст}l. \quad (6.7)$$

При повороте корпуса автомобиля на угол α относительно поперечной оси, проходящей через ось заднего колеса, возникает момент сил, стремящийся вернуть тело в положение равновесия,

$$M = mgl_2 - k(x_{\text{ст}} + x)l,$$

или с учетом уравнения (6.7)

$$M = -kxl = -kl^2\alpha,$$

где деформация пружины выражена через угол поворота: $x = \alpha l$.

Запишем уравнение динамики вращательного движения в дифференциальной форме:

$$J\ddot{\alpha} = M, \quad J\ddot{\alpha} = -kl^2\alpha,$$

где J – момент инерции корпуса автомобиля относительно оси колебаний; $\ddot{\alpha}$ – угловое ускорение (вторая производная от угла по времени).

Приведем дифференциальное уравнение к стандартному виду:

$$\ddot{\alpha} + \frac{kl^2}{J}\alpha = 0, \quad \ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0,$$

где *собственная частота* колебаний $\omega_0 = \sqrt{\frac{kl^2}{J}}$, откуда момент инерции

корпуса автомобиля $J = \frac{kl^2}{\omega_0^2}$.

6.2. Торсионный (крутильный) маятник

Крутильный маятник – твердое тело, подвешенное на упругом стержне (или нити), противоположный конец которого жестко заделан, а ось стержня совпадает с одной из свободных осей тела.

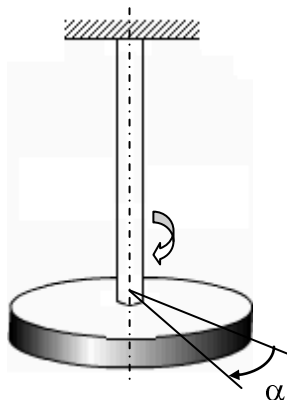


Рис. 6.3

Рассмотрим идеализированную систему: тело абсолютно жесткое; колебания крутильные; сила, стремящаяся вернуть тело в положение равновесия, упругая; силами сопротивления можно пренебречь.

Проведем анализ колебаний крутильного маятника вокруг вертикальной оси при малых углах поворота α (рис. 6.3). Угол α отсчитывается в радианах.

При повороте на угол α стержень закручивается и возникает крутящий момент сил упругости стержня – восстанавливающий момент – стремящийся вернуть тело в положение равновесия,

$$M = -k\alpha.$$

Угловая координата α полностью определяет состояние системы, следовательно, колебательная система имеет одну степень свободы.

Запишем уравнение динамики вращательного движения крутильного маятника:

$$J\ddot{\alpha} = M, \quad J\ddot{\alpha} = -k\alpha,$$

где J – момент инерции тела относительно оси колебаний (оси стержня); $\ddot{\alpha}$ – угловое ускорение (вторая производная от угла по времени); k – коэффициент крутильной жесткости.

Приведем дифференциальное уравнение к стандартному виду:

$$\ddot{\alpha} + \frac{k}{J}\alpha = 0, \quad \ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0, \quad (6.8)$$

где *собственная частота* и *период* соответственно равны:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{J}}, \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{k}}. \quad (6.9)$$

Уравнение (6.8) является *дифференциальным уравнением свободных незатухающих колебаний*. Данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Решение такого уравнения записывается в общем виде и амплитудной форме соответственно:

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{\alpha}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t), \quad \alpha = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (6.10)$$

$$A = \sqrt{\alpha_0^2 + \frac{\dot{\alpha}_0^2}{\omega_0^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{\dot{\alpha}_0}{\alpha_0 \omega_0}, \quad (6.11)$$

где $A = \alpha_{max}$ и φ_0 – амплитуда и начальная фаза колебаний; α_0 и $\dot{\alpha}_0$ – начальный угол поворота и начальная угловая скорость.

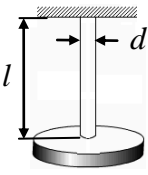
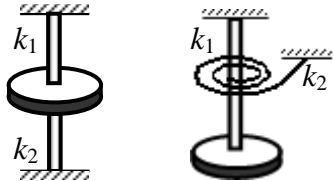
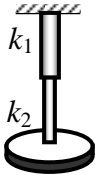
Амплитуда и начальная фаза колебаний зависят от начальных условий: α_0 и $\dot{\alpha}_0$ (см. формулы (6.11)).

Уравнение (6.10) является *уравнением гармонических колебаний* крутильного маятника.

Собственная частота и период зависят от параметров системы: момента инерции тела и коэффициента крутильной жесткости стержня (см. формулы (6.9)).

В табл. 6.3 приведены формулы для расчета коэффициентов крутильной жесткости для простых систем.

Таблица 6.3

Круглый стержень	Параллельное соединение	Последовательное соединение
		
$k = \frac{\pi d^4 G}{32l}$	$k = k_1 + k_2$	$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}, \quad k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$

В табл. 6.3 используются обозначения: d и l – диаметр и длина стержня; G – модуль сдвига. Для стали $G \approx 0,32 \cdot 10^{11}$ Па.

Крутильные колебания применяют для определения момента инерции тел через экспериментальные значения периода колебаний T_0 (см. формулу 6.9).

6.3. Гравитационный (физический) маятник

Физическим маятником называют абсолютно твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси O , не проходящей через его центр тяжести C (рис. 6.4).

Проведем динамический анализ колебаний физического маятника.

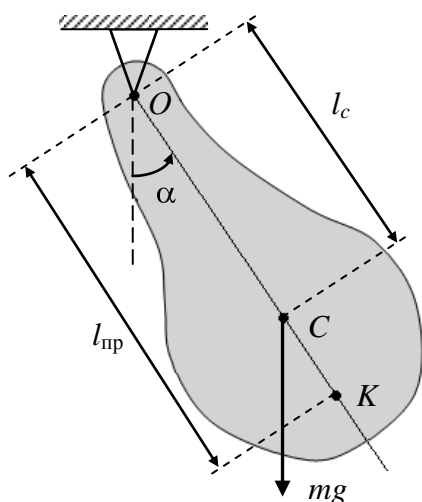


Рис. 6.4

При повороте маятника на угол α возникает возвращающий момент, стремящийся вернуть тело в положение равновесия, – момент силы тяжести:

$$M = -mgl_c \sin \alpha,$$

где m – масса маятника; g – ускорение силы тяжести; l_c – расстояние от точки подвеса O до центра тяжести C .

Угловая координата α полностью определяет состояние системы, следовательно, колебательная система с одной степенью свободы.

Запишем уравнение динамики вращательного движения физического маятника:

$$J\ddot{\alpha} = M, \quad J\ddot{\alpha} = -mgl_c \sin \alpha,$$

где J – момент инерции маятника относительно оси подвеса O ; $\ddot{\alpha}$ – угловое ускорение (вторая производная от угла по времени).

Данное уравнение является нелинейным дифференциальным уравнением 2-го порядка, то есть маятник совершает нелинейные колебания.

Будем рассматривать малые колебания около положения равновесия. В этом случае дифференциальное уравнение можно привести к линейному виду. Если угол α мал, то $\sin\alpha \approx \alpha$. Тогда вращающий момент можно представить линейной зависимостью от α :

$$M = -mgl_c\alpha = -k\alpha,$$

где $k = mgl_c$ – коэффициент квазиупругого момента сил.

С учетом этого факта дифференциальное уравнение примет линейный вид:

$$J\ddot{\alpha} = -mgl_c\alpha.$$

Приведем это уравнение к стандартному виду:

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl_c}{J}\alpha = 0, \quad \ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0, \quad (6.12)$$

где *собственная частота* и *период* задаются выражениями:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl_c}{J}}, \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl_c}}. \quad (6.13)$$

Уравнение (6.12) является *дифференциальным уравнением свободных незатухающих колебаний*. Данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Решение такого уравнения записывается в амплитудной форме:

$$\alpha = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (6.14)$$

$$A = \sqrt{\alpha_0^2 + \frac{\dot{\alpha}_0^2}{\omega_0^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{\dot{\alpha}_0}{\alpha_0\omega_0}, \quad (6.15)$$

где $A = \alpha_{max}$ и φ_0 – амплитуда и начальная фаза колебаний; α_0 и $\dot{\alpha}_0$ – начальный угол поворота и начальная угловая скорость.

Амплитуда и начальная фаза колебаний зависят от начальных условий: α_0 и $\dot{\alpha}_0$ (см. формулы (6.15)).

Уравнение (6.14) является *уравнением гармонических колебаний* физического маятника.

Собственная частота и период зависят от параметров системы: массы маятника; момента инерции маятника и расстояния от точки подвеса до центра тяжести (см. формулы (6.13)).

В качестве простейшего примера физического маятника рассмотрим математический маятник. *Математический маятник* – материальная точка, подвешенная на нерастяжимой невесомой длинной нити (рис. 6.5).

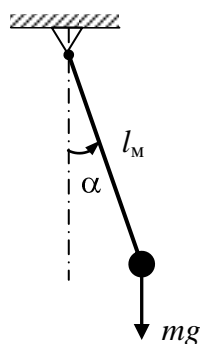


Рис. 6.5

Запишем параметры математического маятника: расстояние от точки подвеса до центра тяжести $l_c = l_M$; момент инерции материальной точки $J = ml_M^2$. Подставим в формулу для периода физического маятника

$$T_\Phi = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl_c}} \quad (6.16)$$

параметры математического маятника, получим:

$$T_M = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl_c}} = 2\pi \sqrt{\frac{ml_M^2}{mgl_M}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_M}{g}}. \quad (6.17)$$

Из сопоставления формул следует, что формулу (6.16) можно привести к виду, идентичному (6.17):

$$T_\Phi = 2\pi \sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}},$$

где введено обозначение

$$l_{\text{пр}} = \frac{J}{ml_c}. \quad (6.18)$$

Таким образом, математический маятник с длиной $l_{\text{пр}}$ будет иметь такой же период колебаний, как и физический маятник. Величину (6.18) называют *приведенной длиной* физического маятника.

Приведенная длина физического маятника – это условная длина, равная длине математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний данного физического маятника.

Точку K , лежащую на прямой, соединяющей точку подвеса O с центром тяжести C , на расстоянии, равном приведенной длине $l_{\text{пр}}$, от оси подвеса называют *центром качаний* (колебаний) физического маятника

(см. рис. 6.4). Если подвесить физический маятник в точке K , то центр качаний переместится в бывшую точку подвеса O , а приведенная длина и период колебаний не изменятся, то есть точка подвеса и центр качания обладают *свойством взаимной обратимости*.

Покажем, что $l_{\text{пр}}$ всегда больше l_c , то есть центр качания лежит ниже центра тяжести. Проведем математические преобразования формулы (6.18), воспользовавшись теоремой Штейнера для расчета момента инерции J относительно оси подвеса:

$$l_{\text{пр}} = \frac{J_c + ml_c^2}{ml_c} = \frac{J_c}{ml_c} + l_c, \quad (6.19)$$

где J_c – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через центр тяжести C . Из выражения (6.19) видно, что $l_{\text{пр}} > l_c$, так как первое слагаемое всегда положительное.

Метод колебаний физического маятника применяют для определения момента инерции тел различной формы.

6.4. Колебания тел, погруженных в жидкость

В качестве простейшего примера рассмотрим свободные незатухающие колебания понтона на воде (силами сопротивления пренебрежем). Колебания плавающего средства часто называют качкой тела. Рассмотрим вертикальную и бортовую качку понтона.

Вертикальная качка. Вертикальной качкой называют поступательные движения понтона вдоль вертикальной оси, вызывающие попеременное уменьшение и увеличение осадки. Представим понтон в виде прямоугольного параллелепипеда (рис. 6.6). На левом рисунке изображен понтон в положении равновесия; на правом – понтон смещен вниз. Вертикальная качка понтона возможна, если центр тяжести A вытесненной телом жидкости будет находиться на одной вертикали с центром тяжести C понтона.

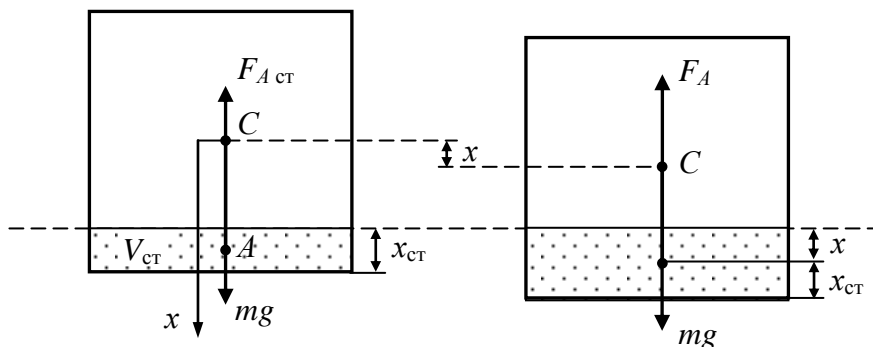


Рис. 6.6

При статическом равновесии понтона сила тяжести равна архимедовой силе:

$$mg = F_{A \text{ ст}}, \quad (6.20)$$

где m – масса понтона; g – ускорение силы тяжести; $F_{A \text{ ст}}$ – сила Архимеда, которую можно выразить через объем погруженной части тела $V_{\text{ст}}$:

$$F_{A \text{ ст}} = \rho g V_{\text{ст}} = \rho g S x_{\text{ст}}, \quad (6.21)$$

где ρ – плотность жидкости; S и $x_{\text{ст}}$ – геометрические размеры объема погруженной части тела $V_{\text{ст}}$.

При случайном погружении понтона (без изменения массы понтона) центр тяжести опустится на величину x (см. рис. 6.6), сила тяжести останется неизменной. Объем погруженной части тела увеличится и, следовательно, сила Архимеда увеличится:

$$F_A = \rho g S(x + x_{\text{ст}}). \quad (6.22)$$

Запишем уравнение движения тела в проекции на ось x :

$$m\ddot{x} = mg - F_A,$$

или с учетом формул (6.20), (6.21) и (6.22):

$$m\ddot{x} = mg - (\rho g Sx + \rho g Sx_{\text{ст}}) = mg - \rho g Sx - mg = -\rho g Sx,$$

$$m\ddot{x} = -\rho g Sx. \quad (6.23)$$

Приведем дифференциальное уравнение (6.23) к стандартному виду:

$$\ddot{x} + \frac{\rho g S}{m} x = 0, \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (6.24)$$

где *собственная частота* вертикальной качки

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho g S}{m}}.$$

Уравнение (6.24) является *дифференциальным уравнением свободных незатухающих колебаний*. Данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными

коэффициентами. Решение такого уравнения записывается в амплитудной форме:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где A и φ_0 – амплитуда и начальная фаза колебаний.

Бортовая качка. Бортовой качкой называют колебательное движение понтона вокруг продольной оси с попеременным креном на левый и правый борта. Представим понтон в виде прямоугольного параллелепипеда (рис. 6.7). На левом рисунке изображен понтон в положении равновесия; на правом – понтон с креном на правый борт.

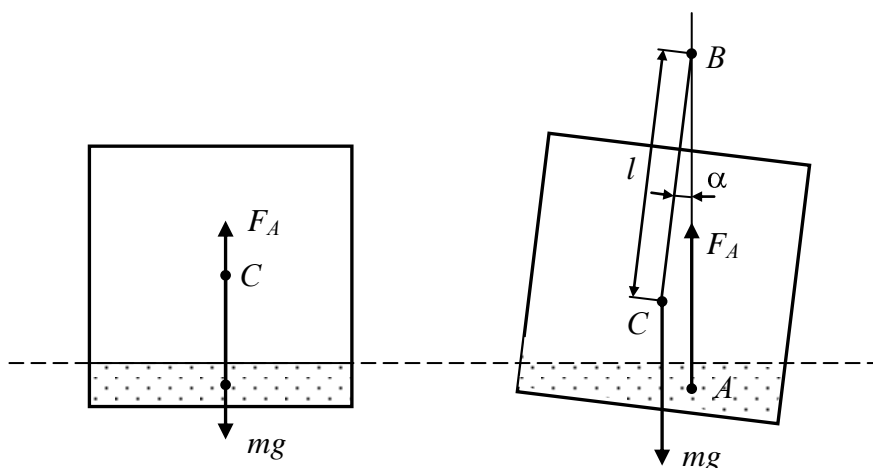


Рис. 6.7

Если метацентр B лежит выше центра тяжести C (см. рис. 6.7), то вращающий момент будет восстанавливающим, то есть стремящимся вернуть тело в положение равновесия, в противном случае – опрокидывающим моментом.

Запишем уравнение динамики вращательного движения понтона:

$$J\ddot{\alpha} = M, \quad J\ddot{\alpha} = -mgl \sin \alpha,$$

где J – момент инерции тела относительно продольной оси; $\ddot{\alpha}$ – угловое ускорение (вторая производная от угла по времени).

Полученное уравнение является нелинейным дифференциальным уравнением 2-го порядка, то есть тело совершает нелинейные колебания.

Будем рассматривать малые колебания около положения равновесия. В этом случае дифференциальное уравнение можно привести к линейному виду. Если угол α мал, то $\sin \alpha \approx \alpha$. Тогда вращающий момент можно представить линейной зависимостью от α :

$$M = -mgl\alpha = -k\alpha,$$

где $k = mgl$ – коэффициент квазиупругого момента сил.

С учетом этого факта дифференциальное уравнение примет линейный вид:

$$J\ddot{\alpha} = -mgl\alpha.$$

Приведем это уравнение к стандартному виду:

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{J}\alpha = 0, \quad \ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0, \quad (6.25)$$

где *собственная частота* и *период* бортовой качки

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}, \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}. \quad (6.26)$$

Уравнение (6.25) является *дифференциальным уравнением свободных незатухающих колебаний*. Данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Решение такого уравнения записывается в амплитудной форме:

$$\alpha = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где A и φ_0 – амплитуда и начальная фаза колебаний.

Метод бортовой качки применяют, например, для расчета метacentрической высоты кораблей l по экспериментальному значению периода колебаний T_0 (см. формулу 6.26).

Вопросы для самоконтроля

1. Приведите вывод дифференциального уравнения собственных незатухающих колебаний пружинного маятника.
2. От чего зависят частота и период собственных незатухающих колебаний пружинного маятника?
3. От чего зависят амплитуда и начальная фаза собственных незатухающих колебаний пружинного маятника?
4. Зависит ли собственная частота колебаний от направления оси пружины (горизонтальное или вертикальное)?
5. Гирька, подвешенная на пружине, совершает колебания с периодом 0,45 с. Чему будет равна деформация пружины, если остановить колебания и оставить гирьку висеть неподвижно?
6. Приведите вывод дифференциального уравнения собственных незатухающих колебаний крутильного маятника.
7. От чего зависят частота и период собственных незатухающих колебаний крутильного маятника?

8. От чего зависят амплитуда и начальная фаза собственных незатухающих колебаний крутильного маятника?
9. Как изменится собственная частота колебаний крутильного маятника, если диаметр стержня маятника увеличить на 10 %?
10. Приведите вывод дифференциального уравнения собственных незатухающих колебаний физического маятника.
11. Что понимается под линеаризацией дифференциального уравнения?
12. От чего зависят частота и период собственных незатухающих колебаний физического маятника?
13. От чего зависят амплитуда и начальная фаза собственных незатухающих колебаний физического маятника?
14. Зависят ли периоды колебания физического и математического маятников от их массы?
15. Объясните физический смысл приведенной длины физического маятника.
16. При каком условии период колебаний физического маятника равен периоду колебаний математического маятника?
17. Почему формулами расчета частоты и периода, полученными в этой главе, можно пользоваться только в том случае, когда амплитуды колебаний маятников малы?
18. В каких случаях качку тела можно считать гармоническим колебанием?
19. Приведите примеры практического применения формул для расчета частоты и периода гармонических осцилляторов.

ГЛАВА 7. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТ И СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ

7.1. Общее условие гармоничности колебаний

Во многих случаях для исследования гармонических колебаний целесообразно использовать энергетический метод, так как применение динамического метода осложнено решением соответствующих дифференциальных уравнений. Энергетический метод определения частот свободных колебаний основан на законе сохранения энергии.

Для консервативной механической системы полная энергия равна сумме кинетической и потенциальной энергий и остается неизменной:

$$E_K + E_P = \text{const.} \quad (7.1)$$

На ряде примеров было показано, что при малых отклонениях от положения равновесия силу можно выразить в виде линейной функции от обобщенной координаты: $F = -\tilde{k}x$, а соответствующую потенциальную энергию – в виде квадратичной функции обобщенной координаты

$$E_P = \frac{\tilde{k}x^2}{2},$$

где символом \tilde{k} обозначен приведенный коэффициент упругой (квазиупругой) силы. Его еще называют эффективной жесткостью.

Кинетическая энергия выражается в виде квадратичной функции от обобщенной скорости:

$$E_K = \frac{\tilde{m}\dot{x}^2}{2},$$

где символом \tilde{m} обозначен приведенный коэффициент инерции, который также называют приведенной (или эффективной) массой.

С учетом этого закон сохранения энергии (7.1) примет вид

$$\frac{\tilde{m}\dot{x}^2}{2} + \frac{\tilde{k}x^2}{2} = const.$$

Продифференцируем правую и левую части уравнения по времени t :

$$\frac{2\tilde{m}\dot{x}\ddot{x}}{2} + \frac{2\tilde{k}x\dot{x}}{2} = 0.$$

Сократим обе части уравнения на \dot{x} (так как в общем случае $\dot{x} \neq 0$), получим:

$$\tilde{m}\ddot{x} + \tilde{k}x = 0, \quad \ddot{x} + \frac{\tilde{k}}{\tilde{m}}x = 0.$$

Обозначим $\omega_0 = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{\tilde{m}}}$ и получим *дифференциальное уравнение гармонического осциллятора*:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Его решение – *уравнение гармонических колебаний* – в общем виде

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t),$$

где x_0 и \dot{x}_0 – начальная координата и начальная скорость, или в амплитудной форме

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где A и φ_0 – амплитуда и начальная фаза колебаний, которые можно определить из начальных условий.

Собственная частота и период колебаний равны соответственно:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{\tilde{m}}}, \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\tilde{m}}{\tilde{k}}}.$$

Полученный результат выражает общее условие гармоничности колебаний.

Если полная сохраняющаяся энергия системы выражается в виде квадратичной функции от некоторой переменной (обобщенной координаты) и ее первой производной по времени (обобщенной скорости), то собственные колебания этой системы являются гармоническими.

7.2. Способы определения частоты энергетическим методом

1-й способ. В этом случае необходимо задаться подходящей формой колебаний, возможно близкой к истинной и удовлетворяющей граничным условиям: $x = x(t)$ и $\dot{x} = \dot{x}(t)$. Составить выражение закона сохранения энергии в виде

$$\frac{\tilde{m}\dot{x}^2}{2} + \frac{\tilde{k}x^2}{2} = const.$$

Продифференцировать его по времени, найти уравнение движения в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

и из него определить ω_0 .

2-й способ. Задаться подходящей формой колебаний, возможно близкой к истинной и удовлетворяющей граничным условиям: $x = x(t)$ и $\dot{x} = \dot{x}(t)$. Далее использовать условие, что для гармонического осциллятора амплитуды кинетической и потенциальной энергий равны:

$$E_{K \max} = E_{P \max}. \quad (7.2)$$

При $x = 0$ и $E_P = 0$ кинетическая энергия принимает максимальное значение:

$$E_{K \max} = \frac{\tilde{m}\dot{x}_m^2}{2}.$$

При $x = x_m$ и $E_K = 0$ потенциальная энергия принимает максимальное значение:

$$E_{P \max} = \frac{\tilde{k}x_m^2}{2}.$$

Амплитуда скорости выражается через частоту ω_0 :

$$\dot{x}_m = x_m \omega_0.$$

С учетом этих фактов из выражения (7.2) можно определить частоту:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2E_{P \max}}{\tilde{m}x_m^2}}.$$

3-й способ. Задаться подходящей формой колебаний и составить выражения для кинетической E_K и потенциальной E_P энергий системы. Если удастся кинетическую и потенциальную энергии привести к виду

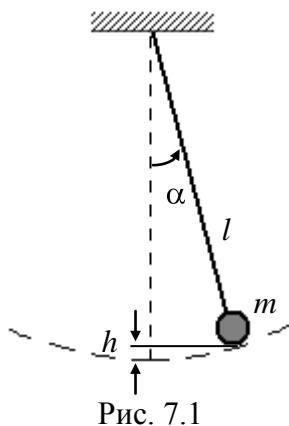
$$E_K = \frac{\tilde{m}\dot{x}^2}{2}, \quad E_P = \frac{\tilde{k}x^2}{2},$$

то колебания можно считать гармоническими. Из выражений для энергий выразить \tilde{m} и \tilde{k} , определить частоту по формуле

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{\tilde{m}}}.$$

7.3. Примеры решения задач энергетическим методом

Пример 1. Найти циклическую частоту и период малых колебаний математического маятника (рис. 7.1). Масса маятника – m , длина нити – l . Применим 1-й способ определения частоты энергетическим методом. В качестве координаты возьмем угол α .



Кинетическая энергия вращательного движения

$$E_K = \frac{J\dot{\alpha}^2}{2} = \frac{ml^2\dot{\alpha}^2}{2},$$

где $J = ml^2$ – момент инерции точки относительно оси колебаний; $\dot{\alpha}$ – угловая скорость.

Потенциальная энергия на высоте h

$$E_P = mgh = mg(l - l \cos \alpha) = mgl(1 - \cos \alpha) = mgl \frac{\alpha^2}{2},$$

где применено соотношение $\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$, так как угол поворота α мал.

Запишем закон сохранения энергии в виде

$$\frac{ml^2 \dot{\alpha}^2}{2} + mgl \frac{\alpha^2}{2} = const.$$

Продифференцировав по времени правую и левую части, получим:

$$\frac{ml^2}{2} 2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{2} 2\alpha\dot{\alpha} = 0,$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \alpha = 0, \quad \ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0.$$

Откуда собственная частота и период колебаний маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Пример 2. Цилиндр массой m и радиусом R , ось которого соединена с упругой пружиной, катается без скольжения по горизонтальной плоскости (рис. 7.2). Найти циклическую частоту и период малых колебаний цилиндра.

Применим 2-й способ определения частоты энергетическим методом.

Смещение от положения равновесия и скорость центра масс цилиндра описываются гармоническими законами:

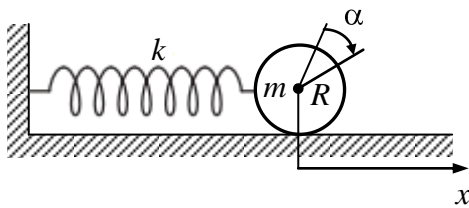


Рис. 7.2

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$\dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

откуда максимальные значения координаты и скорости равны:

$$x_m = A, \quad \dot{x}_m = A\omega_0.$$

При $x = \pm A$ скорость $\dot{x} = 0$ соответствует граничным условиям. Максимальная кинетическая энергия системы

$$E_{K \max} = E_{K \text{ пост}} + E_{K \text{ вр}} = \frac{m\dot{x}_m^2}{2} + \frac{J\dot{\alpha}_m^2}{2}.$$

Момент инерции цилиндра $J = \frac{mR^2}{2}$, максимальная угловая скорость $\dot{\alpha}_m = \frac{\dot{x}_m}{R}$.

С учетом этого преобразуем выражение для максимальной кинетической энергии:

$$E_{K \max} = \frac{m\dot{x}_m^2}{2} + \frac{mR^2}{2} \frac{\dot{x}_m^2}{2R^2} = \frac{3}{4}m\dot{x}_m^2 = \frac{3}{4}mA^2\omega_0^2.$$

Максимальная потенциальная энергия системы

$$E_{P \max} = \frac{kx_m^2}{2} = \frac{kA^2}{2}.$$

Так как для гармонического осциллятора амплитуды кинетической и потенциальной энергий равны: $E_{K \max} = E_{P \max}$, то

$$\frac{3}{4}mA^2\omega_0^2 = \frac{kA^2}{2}.$$

Откуда собственная частота и период колебаний:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3m}}, \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}.$$

Пример 3. Груз небольшого размера массой m закреплен на конце тонкого невесомого стержня длиной l . К стержню прикреплена пружина с коэффициентом жесткости k на расстоянии b от его конца (рис. 7.3). Найти циклическую частоту и период малых колебаний маятника.

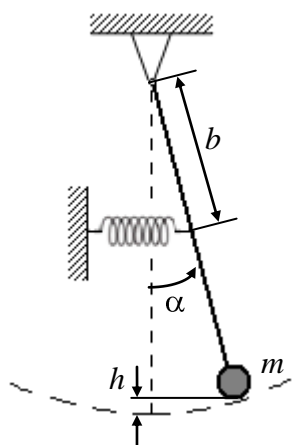


Рис. 7.3

Применим 3-й способ определения частоты энергетическим методом.

В качестве координаты возьмем угол α .

Кинетическая энергия системы

$$E_K = \frac{J\dot{\alpha}^2}{2} = \frac{1}{2}(ml^2)\dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2}\tilde{m}\dot{\alpha}^2,$$

где J – момент инерции материальной точки относительно оси колебаний; $\dot{\alpha}$ – угловая скорость.

Из полученного выражения приведенный коэффициент инерции

$$\tilde{m} = ml^2.$$

Потенциальная энергия системы

$$\begin{aligned} E_p &= mgh + \frac{kx^2}{2} = mg(l - l \cos \alpha) + \frac{kx^2}{2} = \\ &= mgl \frac{\alpha^2}{2} + \frac{kb^2 \alpha^2}{2} = \frac{1}{2} (mgl + kb^2) \alpha^2 = \frac{1}{2} \tilde{k} \alpha^2, \end{aligned}$$

где применено соотношение $\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$, так как угол поворота α мал; $x = b\alpha$ – дуга окружности. Из полученного выражения эффективная жесткость

$$\tilde{k} = mgl + kb^2.$$

Используя полученные выражения для приведенного коэффициента инерции \tilde{m} и эффективной жесткости \tilde{k} , согласно данному способу собственная частота и период колебаний равны:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{\tilde{k}}{\tilde{m}}} = \sqrt{\frac{mgl + kb^2}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{kb^2}{ml^2}}, \\ T_0 &= \sqrt{\frac{ml^2}{mgl + kb^2}}. \end{aligned}$$

7.4. Метод Релея. Учет распределенных масс колебательной системы

Формулу определения частоты собственных колебаний можно представить в виде

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2E_{p \max}}{\tilde{m}x_m^2}}.$$

Как видим из примеров, если потенциальная и кинетическая энергии колебательной системы складываются из отдельных частей, то формулу можно преобразовать к виду

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2 \sum E_{P \max}}{\sum (\tilde{m} x_m^2)}}.$$

Тогда энергетический метод может быть распространен на системы с распределенными массами. Например, колебания упругих балок, крутильные колебания валов и др.

В рассматриваемых ранее случаях задачу сводили к колебаниям с одной степенью свободы путем введения упрощений (не учитывали массу пружины, момент инерции вала крутильного маятника и др.). Во многих случаях при этом получали результаты с достаточной для практики точностью. В других случаях надо учитывать распределенные массы, и для этого используют точные методы аналитической механики.

Метод Релея. Метод Релея – один из приближенных вариационных методов определения частоты колебаний на основе энергетического метода.

1. Задается форма (статистически или динамически) деформационной составляющей системы, отвечающая граничным условиям. Эта форма заранее не известна, но выбирается наиболее приближенная к истинной.

2. Считаем, что все точки системы колеблются с одинаковой частотой ω_0 и в одинаковой фазе.

3. Одним из энергетических способов определяют частоту ω_0 собственных колебаний системы.

4. Релей показал, что рассчитанное значение ω_0 является приближенным и всегда больше или равно точному значению:

$$\omega_{0 \text{ расч.}} \geq \omega_{0 \text{ точн.}}$$

Если правильно задать (угадать) форму колебаний, то решение будет почти точным.

Существует общая формула Релея для определения ω_0 , предназначенная для использования специалистами в области теории колебаний, которую в нашем курсе не рассматриваем.

Пример 1. Определить частоту собственных малых колебаний груза массой m на пружине жесткостью k и длиной l , учитывая массу пружины m_1 .

Выделим элемент пружины dz массой

$$dm_1 = \frac{m_1}{l} dz \quad (7.3)$$

на первоначальном расстоянии z от точки закрепления (рис. 7.4а). Величина $\frac{m_1}{l}$ – погонная масса пружины.

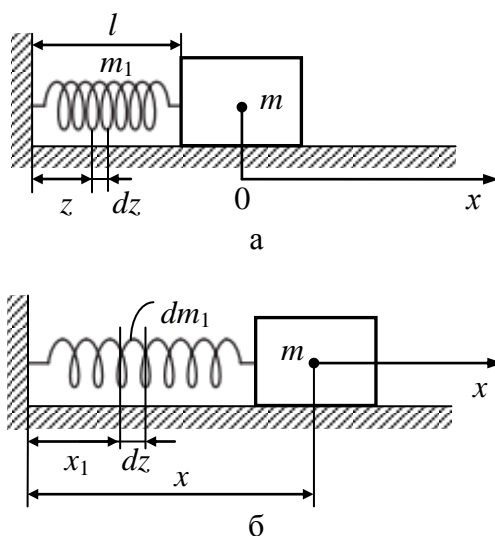


Рис. 7.4

Примем, что форма деформированной пружины при колебаниях соответствует ее форме при статическом деформированном состоянии:

$$x_1 = \frac{z}{l} x,$$

где x_1 – смещение элемента пружины; x – смещение груза (см. рис. 7.4б). То есть зададим линейную зависимость x_1 от x .

В результате дифференцирования x_1 по времени получим, что скорость элемента dm_1

$$\dot{x}_1 = \frac{z}{l} \dot{x}, \quad (7.4)$$

где \dot{x} – скорость груза на конце пружины. То есть скорость тоже линейно распределена по длине пружины.

Это соответствует граничным условиям: при $z = 0$ смещение $x_1 = 0$, скорость точки крепления пружины $\dot{x}_1 = 0$; при $z = l$ смещение $x_1 = x$, скорость конца пружины равна скорости груза $\dot{x}_1 = \dot{x}$.

Можно задать и другие зависимости, соответствующие граничным условиям, например \sin или \exp , а не линейную.

Применим энергетический метод определения собственной частоты.

Кинетическая энергия системы складывается из кинетических энергий груза и пружины:

$$E_K = E_{K_{\text{гр}}} + E_{K_{\text{пр}}}.$$

Рассчитаем каждую энергию по отдельности. Кинетическая энергия груза

$$E_{K_{\text{гр}}} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2.$$

Кинетическая энергия пружины

$$E_{K \text{ пр}} = \frac{1}{2} \int_0^l dm_1 \dot{x}_1^2,$$

или с учетом формул (7.3) и (7.4) и математических преобразований

$$E_{K \text{ пр}} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{m_1}{l} dz \left(\frac{z}{l} \dot{x} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1}{l^3} \dot{x}^2 \int_0^l z^2 dz = \frac{1}{2} \frac{m_1}{3} \dot{x}^2.$$

Кинетическая энергия системы

$$E_K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1}{3} \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \left(m + \frac{m_1}{3} \right) \dot{x}^2. \quad (7.5)$$

Потенциальная энергия системы – это энергия деформированной пружины:

$$E_P = \frac{1}{2} k x^2. \quad (7.6)$$

Далее используем один из приемов энергетического способа, например общее условие гармоничности, согласно которому

$$E_K = \frac{\tilde{m} \dot{x}^2}{2}, \quad E_P = \frac{\tilde{k} x^2}{2},$$

где эффективная масса системы (см. формулу (7.5))

$$\tilde{m} = m + \frac{m_1}{3},$$

эффективная жесткость системы (см. формулу (7.6))

$$\tilde{k} = k.$$

Собственная частота колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{\tilde{m}}} = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{m_1}{3}}} \quad \text{или} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{3m + m_1}}. \quad (7.7)$$

Проанализируем полученный результат.

Согласно выражению (7.7), частота колебаний пружины без груза, то есть при $m = 0$:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{m_1}} = 1,73 \sqrt{\frac{k}{m_1}}.$$

Существует точное решение для колебания пружины без груза, которое дает значение

$$\omega_{0 \text{ точн.}} = 1,57 \sqrt{\frac{k}{m_1}}.$$

Расхождение частот в этом случае составляет 10 %, причем, как и доказал Релей, $\omega_0 > \omega_{0 \text{ точн.}}$.

Формулу (7.7) можно с большой степенью точности использовать даже при больших массах пружины m_1 . Ошибка по сравнению с точным решением составляет:

$$0,5 \% \text{ для } m_1 = 0,5m;$$

$$0,8 \% \text{ для } m_1 = m;$$

$$3,0 \% \text{ для } m_1 = 2m.$$

При $m_1 \gg m$ решение будет более точным, но тоже приближенным, если задать смещение элемента пружины x_1 функцией вида

$$x_1 = x \sin\left(\frac{\pi z}{2l}\right).$$

В этом случае собственная частота колебаний

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{k}{2m + m_1}}.$$

Положив в этой формуле $m = 0$ (нет груза), получим выражение для частоты колебаний пружины:

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 1,57 \sqrt{\frac{k}{m_1}}.$$

Эта формула совпадает с точным решением для пружины без груза:

$$\omega_0 = \omega_{0 \text{ точн.}}$$

Пример 2. Определить частоту собственных малых колебаний крутильного маятника (рис. 7.5) с параметрами: коэффициент крутильной жесткости вала k ; момент инерции груза J ; момент инерции вала J_1 (масса непрерывно распределена по валу).

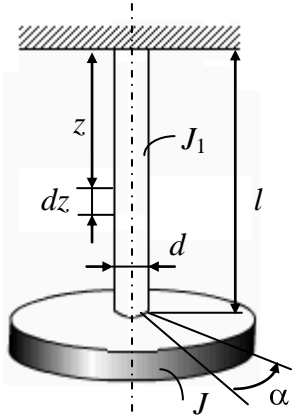


Рис. 7.5

Выделим элемент вала dz , его момент инерции

$$dJ_1 = \frac{J_1}{l} dz. \quad (7.8)$$

Зададим вид деформации при колебаниях, соответствующий статической деформации:

$$\alpha_1 = \frac{z}{l} \alpha,$$

где α_1 – угол поворота элемента вала; α – угол поворота груза. Зависимость α_1 от α – линейная.

В результате дифференцирования α_1 по времени получим, что угловая скорость элемента вала

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{z}{l} \dot{\alpha}, \quad (7.9)$$

где $\dot{\alpha}$ – угловая скорость груза.

Это соответствует граничным условиям: при $z = 0$ угол поворота $\alpha_1 = 0$, угловая скорость точки заделки вала $\dot{\alpha}_1 = 0$; при $z = l$ угол поворота $\alpha_1 = \alpha$, угловая скорость конца вала равна угловой скорости тела ($\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}$).

Применим энергетический метод определения собственной частоты.

Кинетическая энергия системы складывается из кинетических энергий груза и вала:

$$E_K = E_{K \text{ гр}} + E_{K \text{ вал}}.$$

Рассчитаем каждую энергию по отдельности. Кинетическая энергия груза

$$E_{K \text{ гр}} = \frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2.$$

Кинетическая энергия вала

$$E_{K \text{ вал}} = \frac{1}{2} \int_0^l dJ_1 \dot{\alpha}_1^2,$$

или с учетом формул (7.8) и (7.9) и математических преобразований

$$E_{K \text{ вал}} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{J_1}{l} dz \left(\frac{z}{l} \dot{\alpha} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{J_1}{l^3} \dot{\alpha}^2 \int_0^l z^2 dz = \frac{1}{2} \frac{J_1}{3} \dot{\alpha}^2.$$

Кинетическая энергия системы

$$E_K = \frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \frac{J_1}{3} \dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \left(J + \frac{J_1}{3} \right) \dot{\alpha}^2. \quad (7.10)$$

Потенциальная энергия системы

$$E_P = \frac{1}{2} k \alpha^2. \quad (7.11)$$

Согласно условию гармоничности колебаний приведенный коэффициент инерции (см. формулу (7.10))

$$\tilde{m} = J + \frac{J_1}{3},$$

эффективная жесткость системы (см. формулу (7.11))

$$\tilde{k} = k.$$

Следовательно, собственная частота колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{\tilde{m}}} = \sqrt{\frac{k}{J + \frac{J_1}{3}}}.$$

Для крутильного колебания вала без груза (то есть $J = 0$)

$$\omega_0 = 1,73 \sqrt{\frac{k}{J_1}},$$

где k – коэффициент крутильной жесткости вала (см. табл. 6.3);

$J = \frac{m_1 R^2}{2} = \frac{m_1 d^2}{8}$ – момент инерции вала; R и d – радиус и диаметр вала.

Пример 3. Найти частоту собственных колебаний системы, образованной консольной балкой, на конце которой закреплен груз массой m (рис. 7.6). Погонная масса балки $q = \frac{m_1}{l}$, где m_1 и l – масса и длина балки.

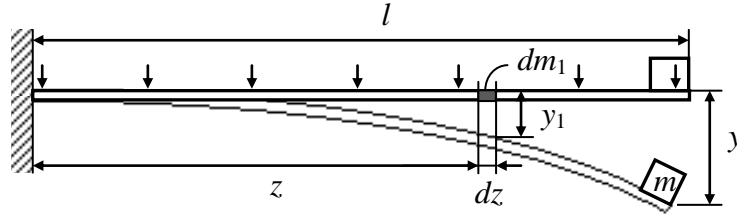


Рис. 7.6

Выделим элемент балки dz массой

$$dm_1 = qdz. \quad (7.12)$$

Допустим, что при колебаниях балка принимает форму такую же, как при статическом нагружении силой на конце:

$$y_1 = y \frac{3z^2l - z^3}{2l^3} = \frac{y}{2} \left[3 \left(\frac{z}{l} \right)^2 - \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right],$$

где y_1 – смещение элемента балки; y – смещение груза.

В результате дифференцирования y_1 по времени получим, что скорость элемента балки

$$\dot{y}_1 = \frac{\dot{y}}{2} \left[3 \left(\frac{z}{l} \right)^2 - \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right], \quad (7.13)$$

где \dot{y} – скорость груза.

Это соответствует граничным условиям: при $z = 0$ смещение $y_1 = 0$, скорость точки заделки балки $\dot{y}_1 = 0$; при $z = l$ смещение $y_1 = y$, скорость конца балки равна скорости тела $\dot{y}_1 = \dot{y}$.

Применим энергетический метод определения собственной частоты.

Кинетическая энергия системы складывается из кинетических энергий груза и балки:

$$E_K = E_{K \text{ гр}} + E_{K \text{ б}}.$$

Рассчитаем каждую энергию по отдельности. Кинетическая энергия груза

$$E_{K \text{ гр}} = \frac{1}{2} m \dot{y}^2.$$

Кинетическая энергия балки

$$E_{K \text{ б}} = \frac{1}{2} \int_0^l dm_1 \dot{y}_1^2,$$

или с учетом формул (7.12) и (7.13) и математических преобразований

$$E_{K \text{ б}} = \frac{1}{2} \int_0^l q dz \left(\frac{\dot{y}}{2} \left[3 \left(\frac{z}{l} \right)^2 - \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right] \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{33}{140} q l \dot{y}^2 = \frac{1}{2} \frac{33}{140} m_1 \dot{y}^2.$$

Кинетическая энергия системы

$$E_K = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \frac{33}{140} m_1 \dot{y}^2 = \frac{1}{2} \left(m + \frac{33}{140} m_1 \right) \dot{y}^2. \quad (7.14)$$

Потенциальная энергия системы

$$E_P = \frac{1}{2} k y^2 = \frac{1}{2} \frac{3EI_c}{l^3} y^2, \quad (7.15)$$

где k – коэффициент жесткости балки (см. табл. 6.2).

Согласно условию гармоничности колебаний эффективная масса системы (см. формулу (7.14))

$$\tilde{m} = m + \frac{33}{140} m_1,$$

эффективная жесткость системы (см. формулу (7.15))

$$\tilde{k} = \frac{3EI_c}{l^3}.$$

Следовательно, собственная частота колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\tilde{k}}{\tilde{m}}} = \sqrt{\frac{3EI_c}{l^3 \left(m + \frac{33}{140} m_1 \right)}}.$$

Для предельного случая $m = 0$ (балка без груза)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3EI_c}{l^3 \frac{33}{140} m_1}} = 3,567 \sqrt{\frac{EI_c}{m_1 l^3}}.$$

Существует точное решение задачи колебаний упругой балки без груза, которое дает значение

$$\omega_{0 \text{ точн.}} = 3,515 \sqrt{\frac{EI_c}{m_1 l^3}}.$$

Расхождение частот в этом случае составляет 1,5 %, причем, как и доказал Релей, $\omega_0 > \omega_{0 \text{ точн.}}$.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем заключается общее условие гармоничности колебаний?
2. Приведите три способа определения частоты энергетическим методом.
3. В чем заключается метод Релея для расчета частоты собственных колебаний?
4. Как учет массы пружины влияет на величину частоты собственных колебаний пружинного маятника?
5. Чему равна частота колебаний пружины без груза?
6. Как учет момента инерции вала влияет на величину частоты собственных колебаний крутильного маятника?
7. Чему равна частота колебаний вала?
8. Расчет частоты приближенным методом Релея дает завышенное или заниженное значение частоты по сравнению с точным решением?

ГЛАВА 8. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМАХ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

До сих пор мы рассматривали консервативные механические системы, в которых рассеяние энергии не происходит, для которых был установлен незатухающий характер процесса свободных колебаний.

Однако все реальные колебательные системы являются диссипативными – в них полная энергия постепенно расходуется на совершение работы против сил трения (сопротивления) и переходит во внутреннюю энергию. Колебания такой системы не могут продолжаться бесконечно долго и постепенно затухают, если убыль энергии не восполняется за счет работы внешних сил, как это имеет место при вынужденных колебаниях и автоколебаниях.

В общем случае сила трения $F_{\text{тр}}$ при относительном механическом движении тел зависит от скорости \dot{x} и направлена против скорости.

8.1. Дифференциальное уравнение колебания в системах с вязким сопротивлением

Сила сопротивления движущегося тела в вязкой среде зависит от формы, размеров тела, вязких свойств среды и от скорости движения.

В простейшем, но и наиболее часто встречающемся случае сила сопротивления пропорциональна 1-й степени скорости:

$$F_x = -b\dot{x},$$

где b – коэффициент сопротивления среды; \dot{x} – скорость тела.

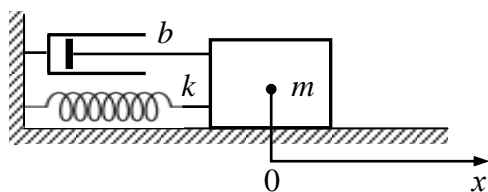


Рис. 8.1

Такова, например, система с гидравлическим демпфером, в которой создается сопротивление движению поршня (рис. 8.1). Подобные устройства применяют в конструкции автоматической подвески – гидро или пневмоамортизаторах.

Направим ось x вдоль траектории и совместим ноль с положением устойчивого равновесия. На тело массой m действуют две силы – сила упругости и сила сопротивления. Применим основное уравнение динамики (2-й закон Ньютона). Составим дифференциальное уравнение движения тела:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}.$$

Это уравнение приводится к стандартному виду линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Применив обозначения

$$2\beta = \frac{b}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m},$$

перепишем уравнение в виде

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (8.1)$$

Решение этого уравнения произведем по общему правилу интегрирования линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с помощью подстановки

$$x(t) = e^{\lambda t},$$

где λ – постоянная величина. В результате дифференцирования функции $x(t)$ по времени получим выражения для скорости и ускорения соответственно:

$$\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}, \quad \ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Подстановка выражений x и \ddot{x} в уравнение (8.1) приводит после сокращения на множитель $e^{\lambda t}$ к характеристическому уравнению

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (8.2)$$

Решение этого квадратного уравнения:

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}, \quad (8.3)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – собственная частота незатухающих колебаний системы;

$\beta = \frac{b}{2m}$ – коэффициент затухания.

В зависимости от соотношения ω_0 и β могут быть три различных случая:

при малом сопротивлении $\beta < \omega_0$ движение системы представляет собой затухающие колебания;

при большом сопротивлении $\beta > \omega_0$ система совершает лимитационное аperiodическое движение;

при $\beta = \omega_0$ – предельный случай лимитационного движения.

8.2. Затухающие колебания

При $\beta < \omega_0$ подкоренное выражение формулы (8.3) отрицательное. Представим его в виде

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = -\beta \pm i\omega_1,$$

где $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – вещественная величина, $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Общее решение дифференциального уравнения (8.1) можно представить в виде

$$x = c_1^* x_1 + c_2^* x_2 = c_1^* e^{\lambda_1 t} + c_2^* e^{\lambda_2 t} = c_1^* e^{(-\beta + i\omega_1)t} + c_2^* e^{(-\beta - i\omega_1)t},$$

$$x = e^{-\beta t} (c_1^* e^{i\omega_1 t} + c_2^* e^{-i\omega_1 t}), \quad (8.4)$$

где c_1^* и c_2^* – две постоянные.

Выражение в скобках формулы (8.4) мы уже рассматривали, изучая незатухающие колебания, поэтому аналогично с помощью формулы Эйлера перепишем уравнение (8.4) в виде

$$x = e^{-\beta t} [c_1 \cos(\omega_1 t) + c_2 \sin(\omega_1 t)], \quad (8.5)$$

где c_1 и c_2 – постоянные интегрирования, которые находят из начальных условий. Для этого, дифференцируя полученное решение по времени, получим выражение для скорости \dot{x} :

$$\begin{aligned} \dot{x} = & -e^{-\beta t} [c_1 \cos(\omega_1 t) + c_2 \sin(\omega_1 t)] + \\ & + e^{-\beta t} [c_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t) + c_2 \omega_1 \cos(\omega_1 t)]. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Подставив *начальные условия* (в начальный момент времени $t = 0$ начальная координата $x(0) = x_0$, начальная скорость $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$) в формулы (8.5) и (8.6), получим:

$$x_0 = 1 \cdot (c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0),$$

$$\dot{x}_0 = -\beta \cdot 1 \cdot (c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0) + 1 \cdot (-c_1 \cdot \omega_1 \cdot 0 + c_2 \cdot \omega_1 \cdot 1).$$

Из решения этой системы уравнений следует, что

$$c_1 = x_0, \quad c_2 = \frac{\dot{x}_0 + \beta x_0}{\omega_1}.$$

Циклическая частота затухающих колебаний $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

То есть решение (8.5) полностью определено.

Удобно представить решение в амплитудной форме:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0), \quad (8.7)$$

это кинематическое уравнение затухающих колебаний.

Постоянные A_0 и φ_0 получаются из начальных условий.

Дифференцируя решение по времени, получим второе уравнение для определения A и φ_0 в виде зависимости скорости \dot{x} от времени:

$$\dot{x} = A_0(-\beta)e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0) - A_0 e^{-\beta t} \omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_0). \quad (8.8)$$

Подставив *начальные условия* (в начальный момент времени $t = 0$ начальная координата $x(0) = x_0$, начальная скорость $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$) в формулы (8.7) и (8.8), получим выражения для начальной координаты и начальной скорости:

$$x_0 = A_0 \cos \varphi_0,$$

$$\dot{x}_0 = -\beta x_0 - A_0 \omega_1 \sin \varphi_0.$$

Решая эту систему уравнений, получим, что *начальная амплитуда и начальная фаза* определяются выражениями:

$$A_0 = \sqrt{x_0^2 + \frac{(x_0 \beta + \dot{x}_0)^2}{\omega_1^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{x_0 \beta + \dot{x}_0}{\omega_1 x_0}. \quad (8.9)$$

Уравнение для $\operatorname{tg} \varphi_0$ математически удовлетворяет двум значениям φ_0 в интервале $-\pi \leq \varphi_0 \leq \pi$. Физический смысл для колебательной системы имеет только одно значение φ_0 , при котором выполняются начальные условия с точностью до знаков «+» или «-» начальной координаты и начальной скорости.

Движение, соответствующее уравнению (8.7), имеет колебательный характер и является затухающим колебанием. Графически данное движение представлено на рис. 8.2 в виде синусоиды между двумя ограничивающими экспонентами.

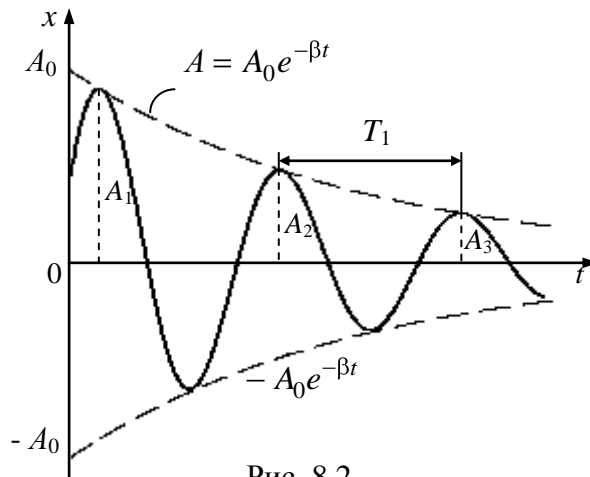


Рис. 8.2

Затухающие колебания являются негармоническими и непериодическими, так как в точности не повторяются. Максимальные значения координаты x_{max} строго говоря не являются амплитудой. Однако они сохраняют некоторые свойства периодичности, через равные промежутки времени чередуются *max* и *min* координаты. Затухающие колебания – это условно-периодические колебания. Чем меньше коэффициент затухания β , тем ближе затухающие колебания к гармоническим колебаниям.

8.3. Характеристики затухающих колебаний

Уравнение затухающих колебаний имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0). \quad (8.10)$$

В соответствии с видом функции (8.10) движение можно рассматривать как гармоническое колебание частоты ω_1 с амплитудой, изменяющейся по закону

$$A = A_0 e^{-\beta t}. \quad (8.11)$$

Величину A называют *амплитудой* (условной) затухающих колебаний. Амплитуда с течением времени согласно закону (8.11) убывает по экспоненциальному закону (см. рис. 8.2, верхняя пунктирная кривая). Следует напомнить, что полученный вид зависимости получен при условии, что сила сопротивления пропорциональна скорости: $F \sim \dot{x}$.

Начальная амплитуда A_0 и начальная фаза φ_0 зависят от начальных условий: начальной координаты x_0 и начальной скорости \dot{x}_0 (см. формулы (8.9))

Циклическая частота (условная) затухающих колебаний равна

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Период (условный) затухающих колебаний – это минимальное время между двумя максимальными отклонениями в одну сторону (см. рис. 8.2):

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad \text{или} \quad T_1 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (\beta/\omega_0)^2}}.$$

Из этих выражений видно, что частота затухающих колебаний меньше собственной, а период – больше: $\omega_1 < \omega_0$, а $T_1 > T_0$. При малом коэффициенте сопротивления ($\beta \ll \omega_0$) частоты и периоды практически равны: $\omega_1 \approx \omega_0$ и $T_1 \approx T_0$.

Коэффициент затухания характеризует скорость затухания колебаний и зависит от коэффициента сопротивления среды b и массы колеблющегося тела:

$$\beta = \frac{b}{2m}.$$

Чем больше сопротивление среды b , тем больше β и быстрее затухают колебания.

Величина β оказывает основное влияние не на период колебаний T_1 , а на амплитуду A , то есть на быстроту затухания. Например, при малом сопротивлении $\beta = 0,05\omega_0$ период $T_1 = 1,0012 \cdot T_0$, то есть $T_1 \approx T_0$. Через одно колебание ($t = T$) амплитуда $A_1 = A_0 e^{-\beta T} = 0,73A_0$, через $t = 10T$ амплитуда $A_{10} = 0,043A_0$, то есть амплитуда быстро затухает.

Теоретическое решение показывает, что амплитуда убывает пропорционально $e^{-\beta t}$ (по экспоненте), следовательно, полностью колебания должны затухнуть при $t \rightarrow \infty$, что не соответствует наблюдениям в реальных технических системах. Для преодоления этого противоречия вводится характеристика – постоянная времени затухающих колебаний (или время релаксации). Время релаксации – величина, обратная коэффициенту затухания:

$$\tau = \frac{1}{\beta}.$$

Время релаксации τ – это время, за которое амплитуда уменьшается в e раз ($e \approx 2,71$ – основание натурального логарифма). Пусть $t = \tau$ (рис. 8.3), тогда

$$A = A_0 e^{-\beta \tau} = A_0 e^{-1} = A_0 / 2,71 = 0,37A_0.$$

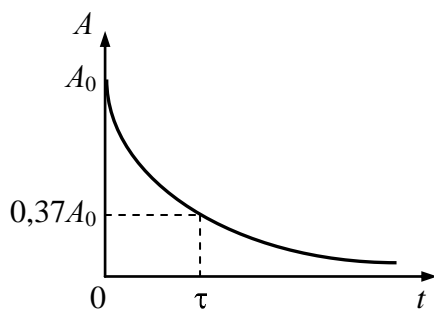


Рис. 8.3

Время затухания (условное) колебаний – это время, за которое амплитуда уменьшается в e^3 раз (примерно в 20 раз), то есть колебания можно считать прекратившимися:

$$\tau_{\text{зат}} = 3\tau.$$

Согласно другим критериям колебания можно считать прекратившимися, если амплитуда уменьшилась в 10 раз, а энергия соответственно уменьшилась в 100 раз:

$$\tau_{\text{зат}} = 2,3\tau$$

или амплитуда уменьшилась в 100 раз:

$$\tau_{\text{зат}} = 4,6\tau.$$

Последовательные наибольшие отклонения колеблющейся величины в одну сторону (см. рис. 8.2) убывают в геометрической прогрессии:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \dots = \frac{A_i}{A_{i+1}} = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T} = \Delta.$$

Декремент затухания Δ показывает, во сколько раз амплитуда уменьшается за один период.

Как характеристику диссипативных свойств колебательной системы чаще используют логарифмический декремент затухания.

Логарифмический декремент затухания – это натуральный логарифм отношения двух последовательных амплитуд колеблющейся величины в одну и ту же сторону (то есть соответствующих моментам времени, отличающимся на период):

$$\lambda = \ln \Delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T_1.$$

Из определения логарифмического декремента затухания вытекает его связь с коэффициентом затухания в виде

$$\lambda = \beta T_1 = 2\pi \frac{\beta}{\omega_1}.$$

Используя логарифмический декремент затухания, можно записать закон убывания амплитуды в зависимости от числа колебаний N в виде

$$A = A_0 e^{-\beta t} = A_0 e^{-\frac{\lambda}{T_1} t} = A_0 e^{-\lambda N},$$

$$A = A_0 e^{-\lambda N}. \quad (8.12)$$

Также логарифмический декремент удобно использовать при очень малом затухании ($\beta \ll \omega_0$). В этом случае изменение амплитуды за один период $\Delta A_i = (A_i - A_{i+1}) \ll A_i$. Запишем выражение для λ с учетом этого факта:

$$\lambda = \ln \frac{A_i}{A_{i+1}} = \ln \frac{A_i}{A_i - \Delta A_i} = -\ln \left(1 - \frac{\Delta A_i}{A_i} \right) \approx \frac{\Delta A_i}{A_i},$$

то есть $\lambda = \left| \frac{\Delta A_i}{A_i} \right|$ – относительное изменение амплитуды за период.

Декремент и логарифмический декремент удобно рассчитывать по результатам эксперимента, измеряя последовательные амплитуды колебания с дальнейшим построением графика $\ln A(N)$.

Прологарифмировав уравнение (8.12), получим:

$$\ln A = \ln A_0 - \lambda N.$$

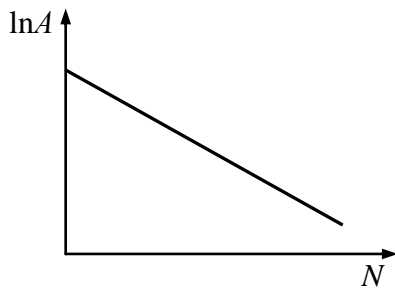


Рис. 8.4

На графике зависимости $\ln A$ от N логарифмический декремент равен угловому коэффициенту, а по виду графика можно определить закон трения: при $F_{\text{тр}} \sim \dot{x}$ график – прямая линия (рис. 8.4).

8.4. Потери механической энергии при затухающих колебаниях

Механическая энергия колебательной системы

$$E = E_K + E_P = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2},$$

где координата и скорость тела:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0),$$

$$\dot{x} = A_0 (-\beta) e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0) - A_0 e^{-\beta t} \omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_0).$$

После математических преобразований получим:

$$E = \frac{1}{2} k A_0^2 e^{-2\beta t} \left(1 + \frac{\beta}{\omega_1} \sin(2\omega_1 t + 2\varphi_0 + \varphi_1) \right),$$

где $\varphi_1 = \arctg \frac{\beta}{\omega_1}$.

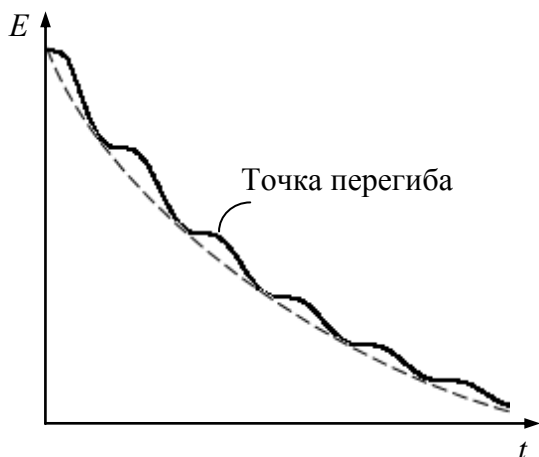


Рис. 8.5

График этой функции приведен на рис. 8.5. В точках перегиба, где скорость $\dot{x} = 0$, сила сопротивления $F_c = -b\dot{x} = 0$ и нет убыли энергии, то есть $\frac{dE}{dt} = 0$. В остальных точках графика $\frac{dE}{dt} < 0$, что соответствует убыли энергии.

При малом затухании ($\beta \ll \omega_0$ и, следовательно, $\frac{\beta}{\omega_0} \ll 1$) слагаемым,

содержащим \sin , можно пренебречь и считать, что энергия изменяется по закону

$$E = E_0 e^{-2\beta t},$$

где $E_0 = \frac{1}{2} kA_0^2$ – полная механическая энергия колебательной системы в начальный момент времени.

Скорость изменения механической энергии

$$\frac{dE}{dt} = -2\beta E_0 e^{-2\beta t} = -2\beta E.$$

Отсюда следует, что при малом затухании приращение энергии за один период отрицательное:

$$\Delta E = -2\beta E T.$$

Изменив знак на обратный, найдем убыль энергии:

$$\Delta E = 2\beta E T = 2\lambda E.$$

Относительное уменьшение механической энергии за один период затухающих колебаний:

$$\psi = \frac{\Delta E}{E} = 2\lambda$$

называется *коэффициентом поглощения* энергии за период. Этой характеристикой часто пользуются в строительстве, она зависит от конструкции и свойств материала колебательной системы.

В электромеханике для характеристики диссипативных свойств системы часто употребляют добротность колебательной системы.

Добротность – это безразмерная величина, пропорциональная отношению энергии, запасенной в системе, к потере этой энергии за один период затухающих колебаний:

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E}.$$

Чем больше добротность, тем медленнее затухают колебания.

Добротность можно выразить через другие характеристики затухающих колебаний:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T_1} = \frac{\omega_1}{2\beta} = \frac{1}{2} \omega_1 \tau.$$

8.5. Лимитационное аperiodическое движение

При лимитационном аperiodическом движении тело, выведенное из положения равновесия, возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний. В этом случае вся энергия тела при возвращении в положение равновесия оказывается израсходованной на преодоление сил трения.

Лимитационное движение при большом сопротивлении. При $\beta > \omega_0$ оба корня характеристического уравнения (8.2)

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

являются вещественными и отрицательными.

Общее решение дифференциального уравнения (8.1) в этом случае равно сумме 2-х экспонент:

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\beta t} \left(c_1 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right),$$

где постоянные c_1 и c_2 можно найти из начальных условий (начальная координата $x(0) = x_0$, начальная скорость $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$):

$$c_1 = x_0, \quad c_2 = \dot{x}_0 + \beta x_0.$$

С учетом этого решение примет вид

$$x = e^{-\beta t} \left(x_0 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + (\dot{x}_0 + \beta x_0) e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right).$$

По виду уравнения, содержащего неперiodические функции (экспоненты), можно сказать, что выведенная из положения равновесия система возвращается к положению равновесия, не совершая колебаний. Возможно несколько способов возвращения к положению равновесия, зависящих от начальных условий. Например, тело толкнули от положения равновесия (рис. 8.6а); тело отвели от положения равновесия и отпустили (рис. 8.6б); тело отвели от положения равновесия и толкнули к положению равновесия (рис. 8.6в).

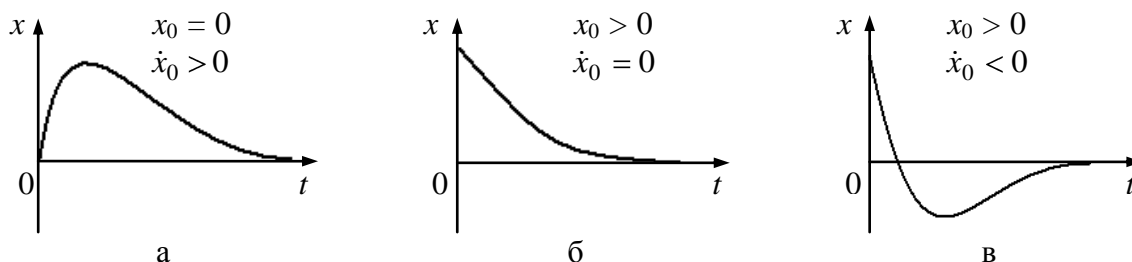


Рис. 8.6

Лимитационное движение при критическом сопротивлении. При $\beta = \omega_0$ корни характеристического уравнения (8.2)

$$\lambda_{1,2} = -\beta$$

являются кратными и отрицательными.

Общее решение дифференциального уравнения (8.1) в этом случае имеет вид

$$x = c_1 e^{-\beta t} + c_2 t e^{-\beta t} = e^{-\beta t} (c_1 + c_2 t),$$

где постоянные c_1 и c_2 найдены из начальных условий:

$$c_1 = x_0, \quad c_2 = \dot{x}_0 + \beta x_0.$$

Движение будет предельно аperiодическое, при $t \rightarrow \infty$ координата $x \rightarrow 0$, не совершая колебаний.

8.6. Фазовая диаграмма затухающих колебаний

Затухающие колебания ($\beta < \omega_0$). Для построения фазовой диаграммы запишем временные зависимости координаты и скорости:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0),$$

$$\dot{x} = -A_0[\beta e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0) + \omega_1 e^{-\beta t} \sin(\omega_1 t + \varphi_0)].$$

При $\beta \ll \omega_0$ выражение для скорости примет вид

$$\dot{x} = -A_0 \omega_1 e^{-\beta t} \sin(\omega_1 t + \varphi_0).$$

Исключив из уравнений t , получим:

$$\frac{x^2}{A_0^2} + \frac{\dot{x}^2}{A_0^2 \omega_1^2} = e^{-2\beta t}.$$

Фазовая траектория представляет собой спираль, скручивающуюся к началу координат (рис. 8.7а). Все остальные спирали будут вписываться в нее, не пересекаясь между витками. Точка O – особая точка устойчивого равновесия – устойчивый фокус.

Лимитационное движение ($\beta \geq \omega_0$). При лимитационном затухании фазовый портрет в корне изменяется – фокус в начале координат переходит в устойчивый узел (рис. 8.7б).

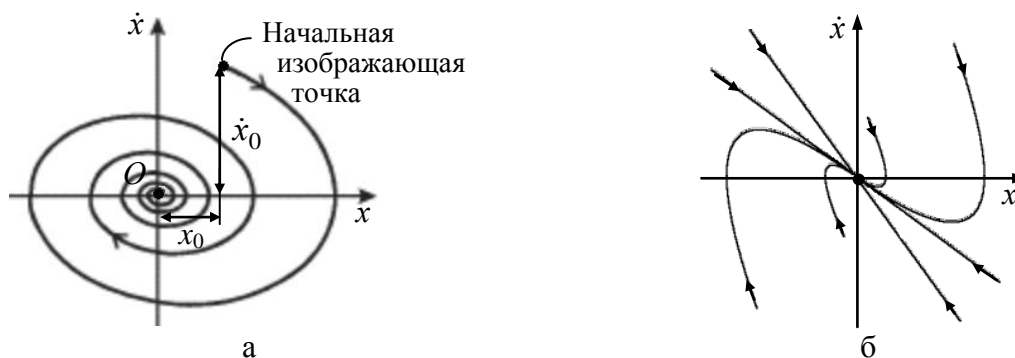


Рис. 8.7

На основе вышеизложенного отметим основные моменты для колебаний системы с одной степенью свободы и вязким сопротивлением, когда сила сопротивления пропорциональна скорости: $F \sim \dot{x}$.

За счет работы сил сопротивления происходит уменьшение механической энергии колебательной системы. С течением времени координата $x \rightarrow 0$, система стремится к устойчивому положению равновесия.

При малом сопротивлении ($\beta < \omega_0$) наблюдаются условно периодические затухающие колебания, причем сопротивление мало влияет на период, но приводит к быстрому уменьшению амплитуды – затуханию колебаний.

При большом сопротивлении ($\beta \geq \omega_0$) наблюдается лимитационное движение, при котором система возвращается к положению равновесия, не совершая колебаний.

8.7. Затухающие колебания при внешнем трении

При внешнем трении поверхностей твердых тел сила трения определяется законом Амонтона – Кулона:

$$F_{\text{тр}} = \mu N,$$

где μ – коэффициент трения скольжения; N – нормальная реакция опоры, равная силе, прижимающей тело к опоре (рис. 8.8).

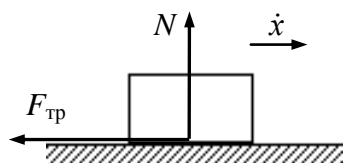
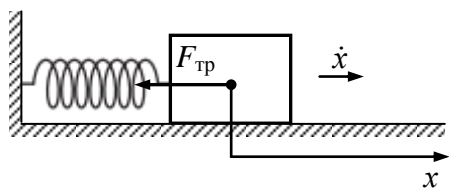


Рис. 8.8

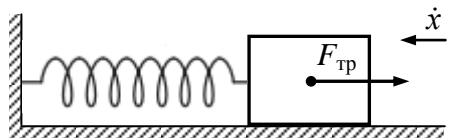
Рассмотрим колебательную систему, состоящую из тела массой m , пружины жесткостью k (рис. 8.9). Массой пружины пренебрегаем. Начало оси x совместим с центром масс тела при недеформированной пружине. При смещении тела от положения равновесия на него в горизонтальном направлении будут действовать сила упругости $F_{\text{упр}}$ и сила трения $F_{\text{тр}}$.

Запишем уравнение движения тела на основе 2-го закона Ньютона:



а

$$m\ddot{x} = -kx - F_{\text{тр}},$$



б

$$m\ddot{x} = -kx + F_{\text{тр}},$$

где знак « \leftarrow » у силы трения соответствует движению от положения равновесия (скорость $\dot{x} > 0$, рис. 8.9а), знак « \rightarrow » – к положению равновесия ($\dot{x} < 0$, рис. 8.9б), то есть сила трения постоянна по величине и переменна по направлению; \ddot{x} – ускорение тела. Фактически мы имеем два уравнения, описывающих движение тела в противоположных направлениях:

$$m\ddot{x} = -kx \pm F_{\text{тр}}.$$

Перепишем их в виде

$$m\ddot{x} + k \left(x \mp \frac{F_{\text{тр}}}{k} \right) = 0. \quad (8.13)$$

Уравнения (8.13) являются нелинейными дифференциальными уравнениями, то есть колебательная система совершает нелинейные колебания.

Введем обозначения:

$$x_{1,2} = x \mp \frac{F_{\text{тр}}}{k}, \quad (8.14)$$

где нижний индекс 1 соответствует выражению со знаком «-», нижний индекс 2 – со знаком «+».

Так как $\frac{F_{\text{тр}}}{k} = \text{const}$, то, дважды продифференцировав выражение (8.14) по времени, получим ускорение

$$\ddot{x}_{1,2} = \ddot{x}.$$

С учетом этого перепишем уравнения (8.13):

$$m\ddot{x}_{1,2} + kx_{1,2} = 0, \quad \ddot{x}_{1,2} + \frac{k}{m}x_{1,2} = 0. \quad (8.15)$$

Вид уравнений (8.15) совпадает с видом уравнения для незатухающих колебаний, но только центры движений лежат в новых точках: $x = -\frac{F_{\text{тр}}}{k}$ и $x = +\frac{F_{\text{тр}}}{k}$ (см. уравнения (8.14), $x_{1,2} = 0$), при каждом отклонении тела положение точки меняется.

Уравнение движения (решение дифференциального уравнения (8.15)) имеет вид:

$$x_{1,2} = A(t) \cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$x = \pm \frac{F_{\text{тр}}}{k} + A(t) \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $A(t)$ – амплитуда (условная) колебаний; $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – частота колебаний, равная собственной частоте.

На основе вышеизложенного отметим, что постоянная по величине сила не влияет на частоту и период колебаний, но смещает «нулевое» положение на величину $x_{\text{ст}} = \pm \frac{F_{\text{тр}}}{k}$, то есть получается как бы ступенчатая ось координат x (рис. 8.10).

Амплитуда со временем уменьшается, так как часть энергии расходуется на преодоление силы трения. Закон убывания амплитуды $A(t)$ определяется характером силы, вызывающей затухание. Для постоянной по ве-

личине силы трения амплитуда убывает по линейному закону, в противоположность случаю вязкого трения, когда сила трения прямо пропорциональна скорости, и амплитуда убывает экспоненциально.

График затухающих колебаний $x(t)$ представлен на рис. 8.11 (сплошная линия). График зависимости амплитуды $A(t)$ имеет вид прямой линии (рис. 8.11, пунктирная линия).

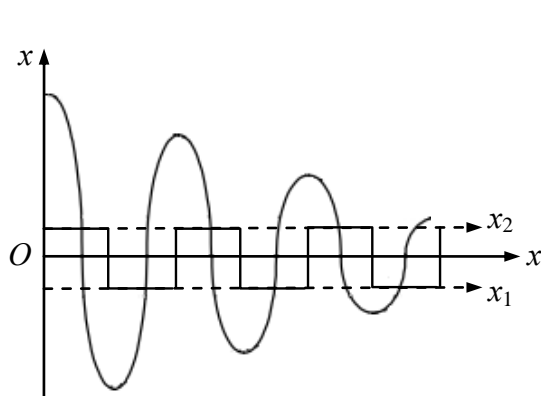


Рис. 8.10

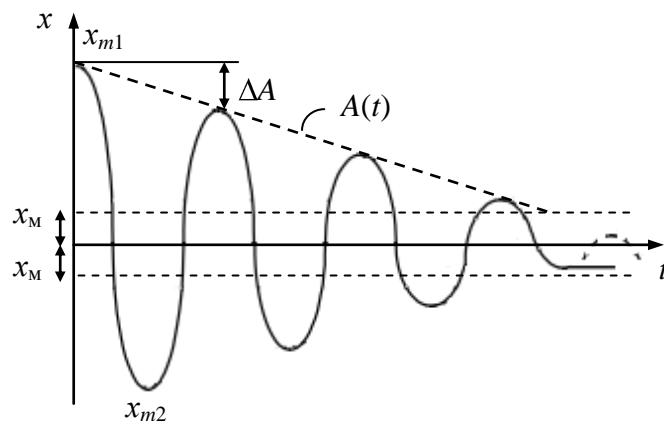


Рис. 8.11

Покажем, что амплитуда изменяется за каждый период на одну и ту же величину. Для этого удобно применить энергетическое соотношение.

Работа силы трения за половину периода равна по величине уменьшению максимальных значений потенциальной энергии:

$$F_{\text{тр}}(x_{m1} + x_{m2}) = \frac{kx_{m1}^2}{2} - \frac{kx_{m2}^2}{2},$$

где x_{m1} и x_{m2} — максимальное отклонение в одну сторону и максимальное отклонение через половину периода в другую сторону от положения равновесия (см. рис. 8.11).

Отсюда после математических преобразований следует:

$$x_{m1} - x_{m2} = \frac{2F_{\text{тр}}}{k}.$$

За вторую половину периода при движении в обратном направлении после аналогичных преобразований получим точно такое же уменьшение, то есть изменение амплитуды колебаний одинаково для каждого полупериода. Следовательно, за полный период амплитуда уменьшается в 2 раза больше, чем за половину периода:

$$\Delta A = \frac{4F_{\text{тр}}}{k},$$

то есть убывает по закону арифметической прогрессии (линейному закону).

Сила трения останавливает движение системы в тот момент, когда одновременно выполняются два условия:

скорость тела $\dot{x} = 0$, то есть тело меняет направление движения;

выполняется соотношение сил: $F_{\text{упр}} \leq F_{\text{тр}}$, то есть $kx \leq F_{\text{тр}}$, откуда от-

клонение $x \leq \frac{F_{\text{тр}}}{k}$.

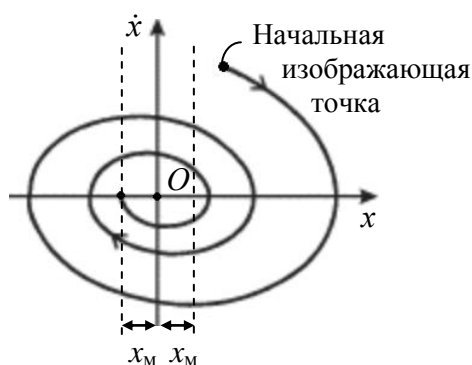


Рис. 8.12

Обозначим $x_m = \frac{F_{\text{тр}}}{k}$. Если откло-

нение $x \leq x_m$, то система попадает в «мертвую» зону (застойную зону) и движение прекращается (см. рис. 8.11).

Вид фазовой траектории при внешнем трении представлен на рис. 8.12. Фазовая траектория представляет собой скручивающуюся спираль, не приходящую в начало координат.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие колебания называют затухающими, в каких механических системах они возникают?
2. От чего зависит сила сопротивления, действующая на тело, движущееся в вязкой среде?
3. Приведите вывод дифференциального уравнения затухающих колебаний в системе с вязким сопротивлением.
4. Какую роль играют начальные условия при решении дифференциального уравнения?
5. Запишите кинематическое уравнение в амплитудной форме для затухающих колебаний в системе с вязким сопротивлением. Расшифруйте обозначения величин, входящих в это уравнение.
6. От чего зависит циклическая частота ω_1 затухающих колебаний в системе с вязким сопротивлением?
7. От чего зависит начальная амплитуда A_0 затухающих колебаний в системе с вязким сопротивлением?
8. От чего зависит начальная фаза φ_0 затухающих колебаний в системе с вязким сопротивлением?
9. Как изменяется с течением времени смещение затухающих колебаний в системе с вязким сопротивлением? Покажите графически.
10. По какому закону изменяется амплитуда затухающих колебаний в системе с вязким сопротивлением? Покажите графически.
11. Являются ли затухающие колебания гармоническими, периодическими? Что называют периодом затухающих колебаний?

12. От чего зависит амплитуда A затухающих колебаний?
13. Что называется коэффициентом затухания? От чего он зависит?
14. Коэффициент затухания оказывает большее влияние на величину периода колебаний или амплитуды?
15. Что называется временем релаксации? Покажите его на графике.
16. При каком условии колебания можно считать прекратившимися?
17. Что называется декрементом затухания и логарифмическим декрементом затухания?
18. Какова связь между логарифмическим декрементом затухания и коэффициентом затухания?
19. Что представляет собой график зависимости полной механической энергии от времени затухающих колебаний в системе с вязким сопротивлением?
20. Что называется добротностью колебательной системы?
21. Как добротность выражается через логарифмический декремент затухания, коэффициент затухания, время релаксации?
22. Что представляет собой лимитационное апериодическое движение? При каких условиях оно наблюдается?
23. Изобразите и проанализируйте фазовую траекторию затухающих колебаний в системе с вязким сопротивлением.
24. Приведите пример фазовой траектории лимитационного движения и проанализируйте ее вид.
25. Приведите вывод дифференциального уравнения затухающих колебаний в системе при внешнем трении.
26. Запишите кинематическое уравнение для затухающих колебаний в системе при внешнем трении. Расшифруйте обозначения величин, входящих в это уравнение.
27. Чему равна циклическая частота ω затухающих колебаний в системе при внешнем трении?
28. Как изменяется с течением времени смещение затухающих колебаний в системе при внешнем трении? Покажите графически.
29. По какому закону изменяется амплитуда затухающих колебаний в системе при внешнем трении? Покажите графически.
30. Как влияет наличие постоянной по величине силы трения в колебательной системе на ее период и амплитуду?
31. Изобразите и проанализируйте фазовую траекторию затухающих колебаний в системе при внешнем трении.

ГЛАВА 9. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Вынужденные колебания – это колебания, возникающие в механической системе при периодическом внешнем воздействии (возбуждении).

9.1. Способы возбуждения колебаний

1. Силовое возбуждение – внешняя периодическая сила непосредственно воздействует на колеблющееся тело (рис. 9.1а).
2. Кинематическое возбуждение – колебания возникают путем сообщения периодического движения отдельным элементам системы, например точке крепления пружины A (рис. 9.1б).

3. Инерционное возбуждение:

вынужденные относительные колебания возникают при сообщении периодического движения основанию, на котором установлен осциллятор (рис. 9.1в);

вынужденные колебания вызываются дисбалансом вращающихся частей осциллятора (рис. 9.1г).

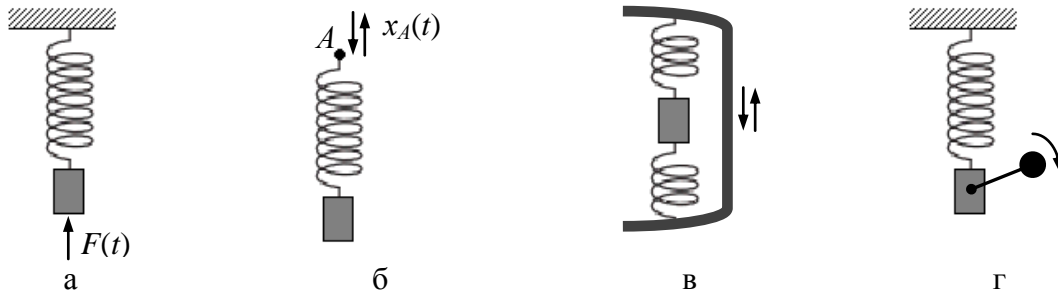


Рис. 9.1

Можно показать, что общий вид дифференциального уравнения, соответствующего этим способам, идентичен, поэтому достаточно получить решение для одного из способов.

Практически наиболее важным является случай, когда возмущающая сила изменяется по гармоническому закону. Как известно, любую периодическую силу можно представить в виде суммы гармонических сил разложением в ряд Фурье.

9.2. Вынужденные колебания под действием гармонической силы в системе без трения

Рассмотрим гармонический осциллятор в виде груза на пружине (рис. 9.2), на который кроме восстанавливающей силы действует внешняя сила, изменяющаяся по гармоническому закону

$$F = F_0 \cos(\Omega t),$$

где F_0 – амплитуда внешней силы; Ω – циклическая частота внешней силы.

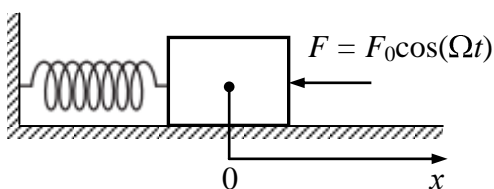


Рис. 9.2

Направим ось x вдоль траектории и совместим ноль с положением устойчивого равновесия. Составим дифференциальное уравнение движения тела:

$$m\ddot{x} = -kx + F_0 \cos(\Omega t).$$

Приведем к стандартному виду линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t),$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\Omega t), \quad (9.1)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – частота свободных незатухающих колебаний; $f_0 = \frac{F_0}{m}$ – амплитуда приведенной силовой характеристики.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$x = x_{\text{общ}} + x_{\text{част}}, \quad (9.2)$$

где $x_{\text{общ}}$ – общее решение однородного дифференциального уравнения; $x_{\text{част}}$ – частное решение неоднородного дифференциального уравнения.

Общее решение однородного дифференциального уравнения нам уже известно в общей и амплитудной формах:

$$x_{\text{общ}} = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t),$$

$$x_{\text{общ}} = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где c_1 и c_2 – постоянные интегрирования.

Частное решение в соответствии с видом функции в правой части дифференциального уравнения (9.1) будем искать в виде

$$x_{\text{част}} = A \cos(\Omega t).$$

Определим постоянную A подстановкой в уравнение (9.1) $x_{\text{част}}$ и $\ddot{x}_{\text{част}}$:

$$\ddot{x}_{\text{част}} = -A\Omega^2 \cos(\Omega t),$$

$$-A\Omega^2 \cos(\Omega t) + A\omega_0^2 \cos(\Omega t) = f_0 \cos(\Omega t).$$

Откуда

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

В итоге общее решение (9.2) получает вид

$$x = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t). \quad (9.3)$$

Дифференцируя полученное решение по времени, получим второе уравнение для определения постоянных c_1 и c_2 в виде зависимости скорости \dot{x} от времени:

$$\dot{x} = -\omega_0 c_1 \sin(\omega_0 t) + c_2 \omega_0 \cos(\omega_0 t) - \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} \Omega \sin(\Omega t). \quad (9.4)$$

Подставив *начальные условия* (в начальный момент времени $t = 0$ начальная координата $x(0) = x_0$, начальная скорость $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$) в формулы (9.3) и (9.4), найдем постоянные:

$$c_1 = x_0 - \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2}, \quad c_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}.$$

Подставив c_1 и c_2 в решение (9.3) и перегруппировав слагаемые, получим уравнение вынужденных колебаний без трения в виде:

$$x = \left(x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right) - \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos(\omega_0 t) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t). \quad (9.5)$$

Проанализируем полученное уравнение.

Выражение в скобках представляет собой уравнение собственных незатухающих колебаний с частотой ω_0 . Если начальная координата $x_0 = 0$ и начальная скорость $\dot{x}_0 = 0$, то такие колебания не возникают.

Второе слагаемое – свободные гармонические колебания с частотой ω_0 и амплитудой $\frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2}$, зависящей от внешних возмущений и не зависящей от начальных условий. Такие колебания называют сопутствующими колебаниями.

Третье слагаемое определяется частным решением и описывает вынужденные колебания. Эти колебания зависят от параметров системы и не зависят от начальных условий.

Таким образом, колебания в рассматриваемом случае – это сумма трех гармонических колебаний: собственных, сопутствующих и вынужденных.

Проанализируем свойства вынужденных колебаний, описываемых уравнением

$$x = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t). \quad (9.6)$$

1. Частота вынужденных колебаний Ω совпадает с частотой возмущающей силы Ω .

Условно колебания делят на колебания малой ($\Omega < \omega_0$) и большой ($\Omega > \omega_0$) частоты.

2. При $\Omega < \omega_0$ фаза вынужденных колебаний (Ωt) совпадает с фазой возмущающей силы $F = F_0 \cos(\Omega t)$.

При $\Omega > \omega_0$ величина $\frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} < 0$. Так как амплитуда – величина положительная, то уравнение колебаний (9.6) приводим к виду

$$x = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t) = \frac{f_0}{\Omega^2 - \omega_0^2} \cos(\Omega t - \pi).$$

Откуда следует, что фазы вынужденных колебаний и возмущающей силы отличаются на π , то есть противоположны.

3. Амплитуда вынужденных колебаний зависит от соотношения частот ω_0 и Ω . При $\Omega < \omega_0$

$$\begin{aligned} A &= \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 (1 - \Omega^2 / \omega_0^2)} = \\ &= \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - (\Omega / \omega_0)^2} = \frac{A_{\text{ст}}}{1 - (\Omega / \omega_0)^2}, \end{aligned}$$

при $\Omega > \omega_0$ для выполнения условия $A > 0$ формула приобретает вид

$$A = \frac{A_{\text{ст}}}{(\Omega / \omega_0)^2 - 1},$$

где *статическая амплитуда* $A_{\text{ст}} = \frac{F_0}{k}$ – статическое отклонение системы от положения равновесия под действием постоянной силы F_0 .

При $\Omega \rightarrow \omega_0$ возникает резкое возрастание амплитуды ($A \rightarrow \infty$), то есть наблюдается резонанс.

Зависимости амплитуды A от частоты Ω и фазы φ от частоты Ω представляют собой амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) и фа-

зочастотную характеристику (ФЧХ) осциллятора. АЧХ и ФЧХ вынужденных колебаний представлены на рис. 9.3а и рис. 9.3б соответственно.

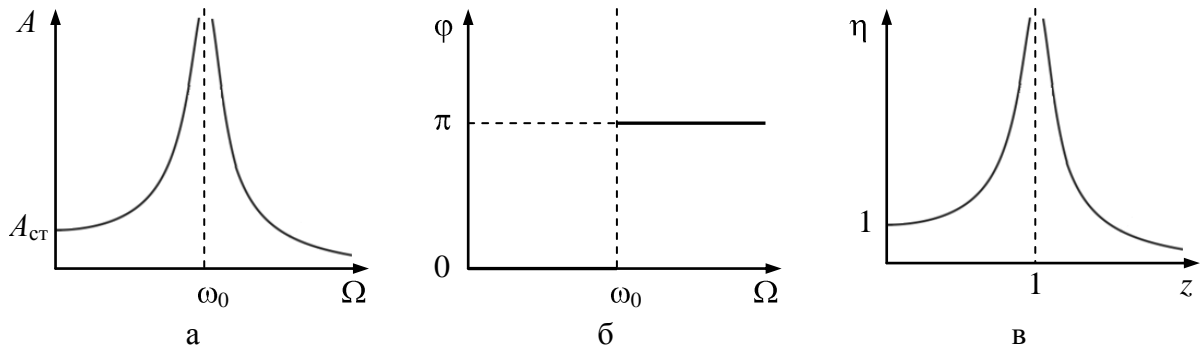


Рис. 9.3

Часто АЧХ выражают в относительных величинах (см. рис. 9.3в).

Введем безразмерные характеристики: *коэффициент частотной расстройки* z – отношение частоты возмущающей силы к собственной частоте:

$$z = \frac{\Omega}{\omega_0},$$

коэффициент динамичности η – отношение амплитуды колебаний к статической амплитуде:

$$\eta = \frac{A}{A_{\text{ст}}}.$$

Выразим коэффициент динамичности через коэффициент частотной расстройки. При малых частотах ($\Omega < \omega_0$)

$$\eta = \frac{A}{A_{\text{ст}}} = \frac{1}{1 - (\Omega/\omega_0)^2} = \frac{1}{1 - z^2},$$

при колебаниях большой частоты ($\Omega > \omega_0$)

$$\eta = \frac{1}{z^2 - 1}.$$

Коэффициент динамичности по определению – величина положительная, поэтому расчетная формула в общем случае имеет вид

$$\eta = \left| \frac{1}{1 - z^2} \right|.$$

Пример на вынужденные колебания системы под действием гармонической силы. Вдоль профиля косинусоидальной формы $x_{\text{п}} = A_1 \cos\left(\frac{\pi r}{l}\right)$ с постоянной скоростью υ движется колесо, на котором упруго подвешен груз массой m (рис. 9.4). Необходимо определить наибольшее допустимое значение коэффициента жесткости подвески k , при котором амплитуда абсолютных колебаний груза не превосходит 5 % от A_1 .

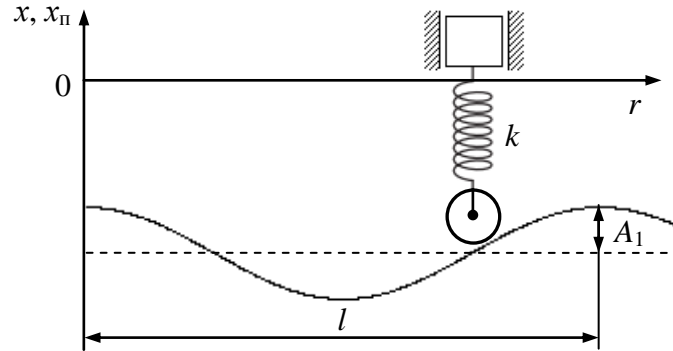


Рис. 9.4

Обозначив через x абсолютное вертикальное перемещение груза, отсчитываемое от положения равновесия, составим дифференциальное уравнение движения груза:

$$m\ddot{x} = -k(x - x_{\text{п}}).$$

Имея в виду, что положение автомобиля на дороге определяется координатой $r = \upsilon t$, ординату профиля дороги $x_{\text{п}}$ представим в функции времени:

$$x_{\text{п}} = A_1 \cos\left(\frac{\pi \upsilon}{l} t\right).$$

С учетом этого выражения дифференциальное уравнение движения перепишем в виде

$$m\ddot{x} + kx = kA_1 \cos\left(\frac{\pi \upsilon}{l} t\right).$$

Из полученного уравнения видно, что собственная частота колебаний $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, эквивалентная возмущающая сила составляет $F = kA_1 \cos\left(\frac{\pi \upsilon}{l} t\right)$ с амплитудным значением силы $F_0 = kA_1$ и частотой $\Omega = \frac{\pi \upsilon}{l}$.

Разделив амплитуду эквивалентной возмущающей силы на коэффициент жесткости подвески, найдем, что при статическом приложении возмущающей силы наибольшее отклонение груза от первоначального уровня

$$A_{\text{ст}} = \frac{F_0}{k} = A_1.$$

Для определения амплитуды колебаний груза A при действии периодической возмущающей силы используем коэффициент динамичности η и его связь с коэффициентом частотной расстройки z :

$$\eta = \frac{A}{A_{\text{ст}}} = \frac{A}{A_1},$$

$$\eta = \frac{1}{1 - z^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{1 - \frac{\pi^2 \nu^2 m}{l^2 k}}.$$

По условию задачи $A \leq 0,05A_1$, следовательно, коэффициент динамичности

$$\frac{1}{1 - \frac{\pi^2 \nu^2 m}{l^2 k}} \leq 0,05,$$

откуда находим

$$k \leq 0,47 \frac{\nu^2 m}{l^2}.$$

9.3. Явление биений при вынужденных колебаниях

Если два складываемых гармонических колебания одного направления мало отличаются по частоте, то возникают биения.

Рассмотрим вынужденные колебания при условии $\Omega \approx \omega_0$, то есть частоты отличаются на малую величину $|\Omega - \omega_0| = \Delta\omega \ll \Omega$. Пусть в начальный момент $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = 0$, тогда колебания описываются уравнением (см. формулу (9.5))

$$x = -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos(\omega_0 t) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t).$$

Преобразуем это выражение, учитывая вышепринятое условие и применяя тригонометрическую формулу для разности косинусов:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} [\cos(\Omega t) - \cos(\omega_0 t)] = \\
 &= \frac{-2f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} \sin\left(\frac{\Omega - \omega_0}{2} t\right) \sin\left(\frac{\Omega + \omega_0}{2} t\right) = \quad (9.7) \\
 &= \frac{2f_0}{\Omega^2 - \omega_0^2} \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \sin(\Omega t), \\
 x &= A_\delta \sin(\Omega t).
 \end{aligned}$$

Последнее выражение можно рассматривать как колебание с частотой Ω и изменяющейся с периодом τ_δ амплитудой:

$$\begin{aligned}
 A_\delta &= \left| \frac{2f_0}{\Omega^2 - \omega_0^2} \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \right|, \\
 \tau_\delta &= \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{|\Omega - \omega_0|}.
 \end{aligned}$$

Период колебаний $T = \frac{2\pi}{\Omega}$, следовательно, период биений $\tau_\delta \gg T$.

Графики колебаний $x(t)$ (сплошная кривая) и амплитуды $A_\delta(t)$ (пунктирная линия) изображены на рис. 9.5.

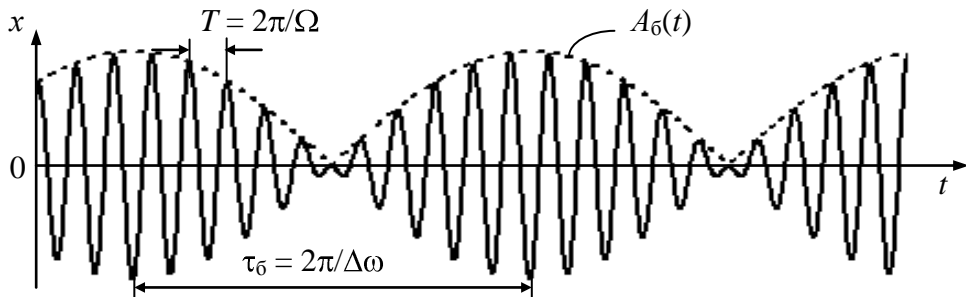


Рис. 9.5

9.4. Явление резонанса в системе без трения

Резонанс – это явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний системы при приближении частоты возмущающей силы к некоторому определенному значению – резонансной частоте $\Omega_{\text{рез}}$. В консервативной системе без трения явление резонанса возникает при совпадении частот вынужденных и собственных колебаний: $\Omega = \omega_0$, то есть $\Omega_{\text{рез}} = \omega_0$.

Пусть в начальный момент $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = 0$, тогда колебания можно описать уравнением (см. формулу (9.7))

$$x = \frac{2f_0}{\Omega^2 - \omega_0^2} \sin\left(\frac{\Omega - \omega_0}{2}t\right) \sin\left(\frac{\Omega + \omega_0}{2}t\right).$$

Выражение в таком виде при $\Omega = \omega_0$ представляет собой неопределенность, которую можно разрешить. Проведем следующие преобразования, применяя формулу для разности квадратов и учитывая, что $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{f_0}{\Omega + \omega_0} \frac{\sin\left(\frac{\Omega - \omega_0}{2}t\right)}{\frac{\Omega - \omega_0}{2}t} t \sin\left(\frac{\Omega + \omega_0}{2}t\right) = \\ &= \frac{f_0}{2\Omega} \cdot 1 \cdot t \cdot \sin(\Omega t) = \frac{f_0 t}{2\Omega} \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Так как частоты одинаковые ($\Omega = \omega_0$), то уравнение колебаний имеет вид

$$x = \frac{f_0 t}{2\Omega} \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{или} \quad x = \frac{f_0 t}{2\omega_0} \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right). \quad (9.8)$$

Вид выражения (9.8) такой же и при других начальных условиях.

График колебаний (9.8) изображен на рис. 9.6.

Проанализируем выражение (9.8). При резонансе в системе без трения:

частота колебаний системы равна частоте собственных колебаний и частоте внешней возмущающей силы: $\Omega = \omega_0$;

фаза колебаний отстает от фазы внешней силы на $\pi/2$;

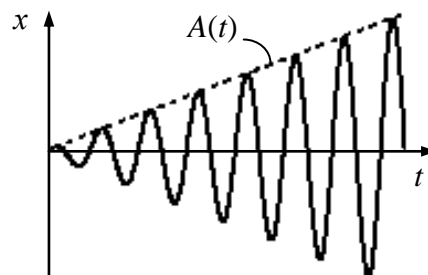


Рис. 9.6

амплитуда вынужденных колебаний в системе без трения неограниченно возрастает пропорционально времени:

$$A = \frac{f_0 t}{2\Omega} = \frac{F_0}{2m\Omega} t,$$

то есть не будет установившихся колебаний (см. рис. 9.6, пунктир).

9.5. Вынужденные колебания в системе с вязким трением и гармоническим возбуждением

Рассмотрим колебательную систему, состоящую из тела массой m , пружины жесткостью k , гидравлического демпфера с коэффициентом сопротивления b (рис. 9.7). Массой пружины пренебрегаем.

Направим ось x вдоль траектории и совместим ноль с положением устойчивого равновесия. На тело при движении действуют восстанавливающая сила $F_y = -kx$, сила вязкого сопротивления $F_c = -b\dot{x}$, пропорциональная скорости \dot{x} . Пусть колебательная система подвергается действию внешней (возмущающей) силы, изменяющейся со временем по гармоническому закону

$$F = F_0 \cos(\Omega t),$$

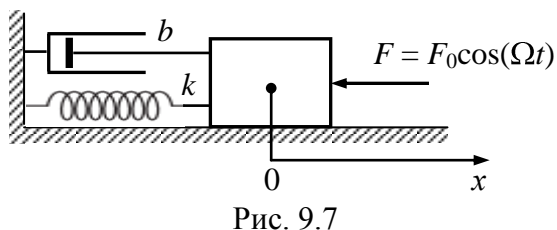


Рис. 9.7

где F_0 – амплитуда внешней силы; Ω – циклическая частота внешней силы.

Составим дифференциальное уравнение движения тела на основе 2-го закона Ньютона:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_0 \cos(\Omega t).$$

Преобразуем уравнение к стандартному виду

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\Omega t), \quad (9.9)$$

введя обозначения (как и в предыдущих случаях):

$$2\beta = \frac{b}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad f_0 = \frac{F_0}{m},$$

где ω_0 – собственная частота; β – коэффициент затухания.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний (9.9) – линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$x = x_{\text{общ}} + x_{\text{част}}, \quad (9.10)$$

где $x_{\text{общ}}$ – общее решение однородного дифференциального уравнения; $x_{\text{част}}$ – частное решение неоднородного дифференциального уравнения.

Общее решение однородного дифференциального уравнения нам уже известно, при $\beta < \omega_0$ (малом затухании) решение в общей и амплитудной формах имеет вид:

$$x_{\text{общ}} = e^{-\beta t} [c_1 \cos(\omega_1 t) + c_2 \sin(\omega_1 t)], \quad (9.11)$$

$$x_{\text{общ}} = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0),$$

где c_1 и c_2 – постоянные интегрирования; $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – циклическая частота затухающих колебаний.

Эти решения получены ранее для затухающих колебаний, но в рассматриваемом случае постоянные интегрирования c_1 и c_2 будут другими.

Частное решение получим двумя способами.

1. Частное решение в соответствии с видом функции в правой части дифференциального уравнения (9.9) будем искать в виде

$$x_{\text{част}} = A \cos(\Omega t - \varphi), \quad (9.12)$$

где φ – сдвиг фаз между силой и вызываемыми ею колебаниями (найдем его далее).

Определим A и φ подстановкой в уравнение (9.9) $x_{\text{част}}$, $\dot{x}_{\text{част}}$ и $\ddot{x}_{\text{част}}$. Найдем производные по времени:

$$\dot{x}_{\text{част}} = -A\Omega \sin(\Omega t - \varphi),$$

$$\ddot{x}_{\text{част}} = -A\Omega^2 \cos(\Omega t - \varphi).$$

С учетом этого выражение (9.9) примет вид

$$-A\Omega^2 \cos(\Omega t - \varphi) - 2\beta A\Omega \sin(\Omega t - \varphi) + \omega_0^2 A \cos(\Omega t - \varphi) = f_0 \cos(\Omega t).$$

Далее, используя тригонометрические формулы для \cos разности и \sin разности, перегруппировав слагаемые, получим:

$$[A(\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \varphi + 2\beta A \Omega \sin \varphi - f_0] \cos(\Omega t) - \\ - [A(\omega_0^2 - \Omega^2) \sin \varphi - 2\beta A \Omega \cos \varphi] \sin(\Omega t) = 0.$$

Чтобы это равенство выполнялось при любых значениях t , коэффициенты при $\cos(\Omega t)$ и $\sin(\Omega t)$ должны быть равны нулю:

$$A(\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \varphi + 2\beta A \Omega \sin \varphi - f_0 = 0, \\ A(\omega_0^2 - \Omega^2) \sin \varphi - 2\beta A \Omega \cos \varphi = 0. \quad (9.13)$$

Возведем в квадрат оба уравнения и сложим, получим:

$$A^2(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 A^2 \Omega^2 = f_0^2.$$

Откуда амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}. \quad (9.14)$$

Из уравнения (9.13) с учетом (9.14) следует выражение для сдвига фаз между внешней силой и вынужденными колебаниями:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (9.15)$$

То есть частное решение (9.12) полностью определено.

2. Получим частное решение еще одним способом – с помощью векторной диаграммы.

Предположим, что возникающие под действием возмущающей силы установившиеся вынужденные колебания системы также являются гармоническими:

$$x = A \cos(\Omega t - \varphi).$$

Дифференцируя это выражение по времени, получим уравнения колебаний скорости и ускорения:

$$\dot{x} = -A\Omega \sin(\Omega t - \varphi) = A\Omega \cos\left(\Omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\ddot{x} = -A\Omega^2 \cos(\Omega t - \varphi) = A\Omega^2 \cos(\Omega t - \varphi + \pi).$$

Подставим x , \dot{x} и \ddot{x} в выражение (9.9), получим:

$$A\Omega^2 \cos(\Omega t - \varphi + \pi) + 2\beta A\Omega \cos\left(\Omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \omega_0^2 A \cos(\Omega t - \varphi) = f_0 \cos(\Omega t).$$

Обозначим:

$$A_1 = A\Omega^2, \quad A_2 = 2\beta A\Omega, \quad A_3 = \omega_0^2 A, \quad A_4 = f_0,$$

тогда последнее равенство можно записать в виде

$$A_1 \cos(\Omega t - \varphi + \pi) + A_2 \cos\left(\Omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + A_3 \cos(\Omega t - \varphi) = A_4 \cos(\Omega t).$$

Правую часть этого выражения можно рассматривать как уравнение гармонического колебания, получившегося при сложении трех гармонических колебаний, определяемых слагаемыми левой части этого равенства. Для сложения этих колебаний воспользуемся методом векторных диаграмм.

Отложим вектор \vec{A}_4 под углом 0° к горизонту (рис. 9.8); затем \vec{A}_3 , повернутый на угол $-\varphi$ от \vec{A}_4 ; потом \vec{A}_2 , повернутый на угол $+\frac{\pi}{2}$ от \vec{A}_3 ; далее \vec{A}_1 , повернутый на угол $+\pi$ от \vec{A}_3 , таким образом, чтобы длины векторов удовлетворяли выражению

$$\vec{A}_4 = (\vec{A}_1 + \vec{A}_3) + \vec{A}_2.$$

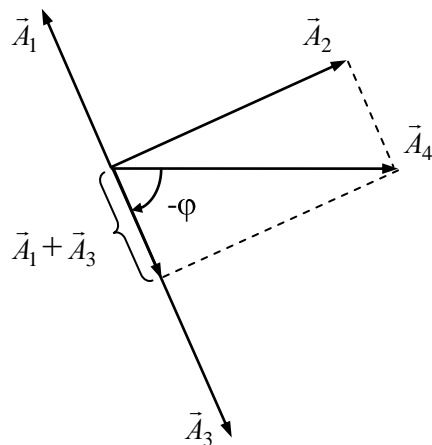


Рис. 9.8

Из рис. 9.8, рассматривая прямоугольный треугольник, следует, что

$$A_4^2 = (A_3 - A_1)^2 + A_2^2.$$

Подставляя в это выражение значения амплитуд A_1, A_2, A_3, A_4 , получим:

$$f_0^2 = (\omega_0^2 A - A\Omega^2)^2 + (2\beta A\Omega)^2.$$

Откуда амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}.$$

Из рис. 9.8, рассматривая геометрию, следует, что выражение для начальной фазы вынужденных колебаний имеет вид

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_2}{A_3 - A_1} = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

Полученные результаты полностью совпадают с формулами (9.14) и (9.15).

Общее решение (9.10) неоднородного дифференциального уравнения в общей форме при $\beta < \omega_0$ с учетом (9.11) и (9.12):

$$x = e^{-\beta t} [c_1 \cos(\omega_1 t) + c_2 \sin(\omega_1 t)] + A \cos(\Omega t - \varphi), \quad (9.16)$$

где A и φ определяются выражениями (9.14) и (9.15).

Далее вычислим постоянные c_1 и c_2 аналогично предыдущим случаям. Для этого необходимо получить выражение для скорости $\dot{x}(t)$, дифференцируя $x(t)$ по времени. Задав начальные условия ($t = 0$, $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$), из системы уравнений $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ определим c_1 и c_2 .

$$c_1 = x_0 - A \cos \varphi,$$

$$c_2 = \frac{1}{\omega_1} (\dot{x}_0 + \beta x_0 - \beta A \cos \varphi - A \Omega \sin \varphi).$$

Подставив c_1 и c_2 в решение (9.16) и перегруппировав слагаемые, получим уравнение вынужденных колебаний в системе с вязким трением:

$$\begin{aligned} x = e^{-\beta t} & \left(x_0 \cos(\omega_1 t) + \frac{\dot{x}_0 + \beta x_0}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \right) - \\ & - A e^{-\beta t} \left(\cos \varphi \cos(\omega_1 t) + \frac{\beta \cos \varphi + \Omega \sin \varphi}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \right) + \\ & + A \cos(\Omega t - \varphi). \end{aligned}$$

Проанализируем полученное уравнение.

Первое слагаемое представляет собой уравнение свободных затухающих колебаний с частотой ω_1 .

Второе слагаемое – свободные сопутствующие колебания с частотой ω_1 .

Третье слагаемое – вынужденные колебания с частотой Ω .

Таким образом, колебания в рассматриваемом случае – это сумма трех гармонических колебаний: затухающих, сопутствующих и вынужденных.

Важно отметить, что затухающие и сопутствующие колебания в данном случае играют заметную роль только в начальной стадии процесса. С течением времени они достаточно быстро убывают из-за множителя $e^{-\beta t}$ в первом и втором слагаемом, и ими можно пренебречь. Результирующее движение будет практически состоять только из вынужденных колебаний:

$$x = A \cos(\Omega t - \varphi).$$

Это уравнение установившихся вынужденных колебаний, которые являются незатухающими гармоническими колебаниями.

Простейший случай установления колебаний представлен на рис. 9.9а.

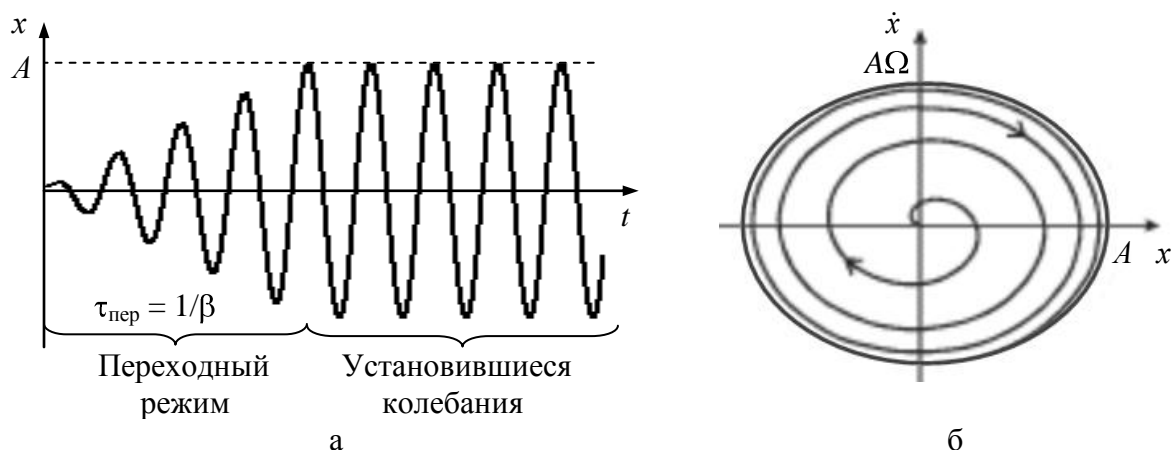


Рис. 9.9

Под действием вынуждающей силы возникают колебания, амплитуда которых сначала растет. По прошествии некоторого промежутка времени (переходного режима) колебательный процесс установится, его амплитуда перестанет изменяться. Именно установившийся режим колебаний во многих случаях представляет основной интерес.

Вид фазовой траектории вынужденных колебаний представлен на рис. 9.9б. Раскручивающаяся спираль соответствует процессу установле-

ния вынужденных колебаний, предельный эллипс с полуосями A и $A\Omega$ – установившимся колебаниям.

Длительность переходного режима в общем случае определяется временем затухания собственных колебаний $\tau_{\text{пер}} = \frac{1}{\beta}$. Переходный режим достаточно сложен и зависит от начальных условий и соотношения частот ω_0 и Ω (рис. 9.10).

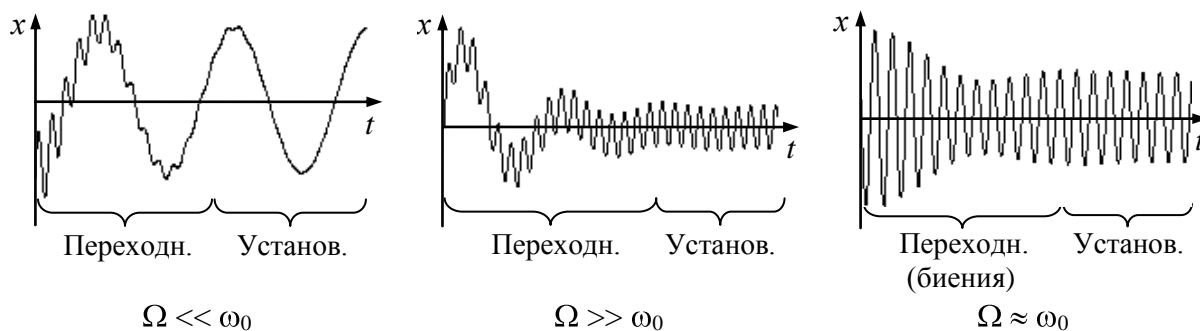


Рис. 9.10

9.6. Анализ уравнения вынужденных колебаний с вязким трением и гармоническим возбуждением. Явление резонанса

В рамках рассмотренной выше модели (при гармоническом возбуждении, вязком трении, в линейной системе) вынужденные колебания описываются уравнением

$$x = A \cos(\Omega t - \varphi). \quad (9.17)$$

1. Вынужденные колебания не являются затухающими, так как потери энергии на сопротивление среды компенсируются притоком энергии за счет работы внешней возмущающей силы. С течением времени наступает режим установившихся незатухающих гармонических колебаний.

2. Частота вынужденных колебаний равна частоте внешней возмущающей силы Ω , не зависит от параметров системы и сил сопротивления.

3. Вынужденные колебания *отстают по фазе* от возмущающей силы, что хорошо видно из уравнений:

$$F = F_0 \cos(\Omega t),$$

$$x = A \cos(\Omega t - \varphi).$$

Фазовый сдвиг определяется формулой (9.15), которую можно записать через безразмерные коэффициенты:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{2 \frac{\beta}{\omega_0} \frac{\Omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{2\varepsilon z}{1 - z^2},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\varepsilon z}{1 - z^2}, \quad (9.18)$$

где коэффициент частотной расстройки z и относительный коэффициент демпфирования ε :

$$z = \frac{\Omega}{\omega_0}, \quad \varepsilon = \frac{\beta}{\omega_0}.$$

Зависимость фазового сдвига φ от безразмерного коэффициента частотной расстройки z (аналогично зависимости φ от частоты внешней силы Ω) называется *фазочастотной характеристикой*.

ФЧХ вынужденных колебаний представлена на рис. 9.11.

При $\beta = 0$ из формулы (9.18) $\operatorname{tg} \varphi = 0$, следовательно, при $\Omega < \omega_0$ сдвиг фаз $\varphi = 0$; при $\Omega > \omega_0$ сдвиг фаз $\varphi = \pi$ (график 1). Этот случай был разобран в п. 9.2.

Если $\beta \ll \omega_0$ (график 2), то
 при $\Omega \rightarrow 0$ ($z \rightarrow 0$) сдвиг фаз $\varphi \rightarrow 0$;
 при $\Omega = \omega_0$ ($z = 1$) сдвиг фаз $\varphi \approx \pi/2$;
 при $\Omega \rightarrow \infty$ ($z \rightarrow \infty$) сдвиг фаз $\varphi \rightarrow \pi$.

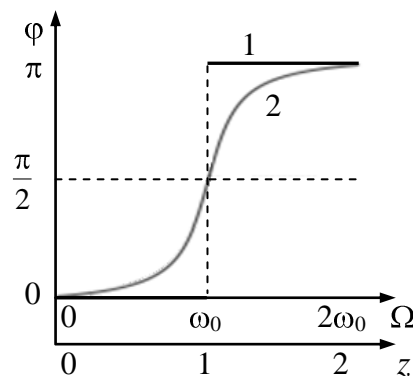


Рис. 9.11

4. Проанализируем выражение для амплитуды вынужденных колебаний:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} \quad \text{или} \quad A = \frac{A_{\text{ст}}}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + (2\varepsilon z)^2}}. \quad (9.19)$$

Амплитуда установившихся колебаний не зависит от начальных условий и не зависит от времени;

амплитуда колебаний пропорциональна амплитуде внешней силы F_0 , так как $f_0 = F_0/m$;

амплитуда сильно зависит от коэффициента частотной расстройки z , то есть от соотношения частот Ω и ω_0 .

5. При частоте внешней силы, близкой к частоте собственных колебаний ($\Omega \rightarrow \omega_0$), возникает резкое возрастание амплитуды, то есть наблюдается *резонанс*.

Зависимость амплитуды A от безразмерного коэффициента частотной расстройки z (аналогично зависимости A от частоты внешней силы Ω) называется *амплитудно-частотной характеристикой*. График зависимости $A(\Omega)$ или $A(z)$ называется *резонансной кривой*.

Резонансные кривые для колебательной системы с различными коэффициентами затухания β приведены на рис. 9.12. Чем меньше затухание, тем острее резонанс. Максимальное значение амплитуды наблюдается при резонансной частоте $\Omega_{\text{рез}}$.

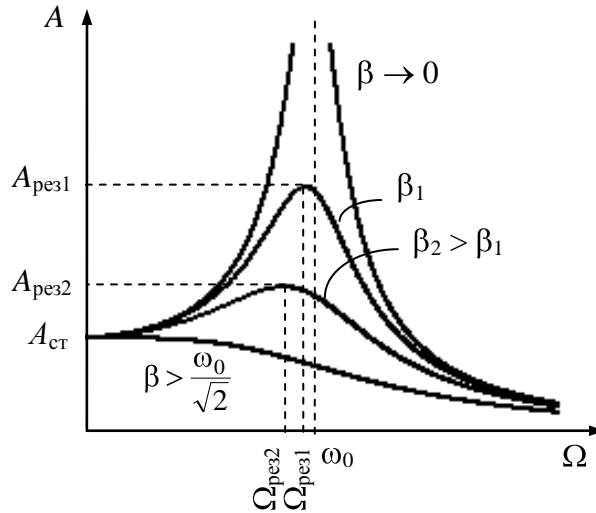


Рис. 9.12

Для нахождения резонансной частоты проанализируем выражение (9.19). Амплитуда будет максимальна при минимальном значении знаменателя. Для нахождения точки перегиба возьмем первую производную по Ω от подкоренного выражения (9.19) и приравняем ее к нулю:

$$\frac{d}{d\Omega} [(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2] = 0,$$

$$-2(\omega_0^2 - \Omega^2)2\Omega + 8\beta^2 \Omega = 0,$$

$$\Omega(\Omega^2 - \omega_0^2 + 2\beta^2) = 0.$$

Последнее уравнение относительно Ω является кубическим, следовательно, имеет 3 решения (корня).

$\Omega = 0$. Это решение соответствует статическому отклонению системы от положения равновесия под действием постоянной силы F_0 (см. рис. 9.12):

$$A_{\text{ст}} = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}.$$

$\Omega = -\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ – отрицательный корень уравнения, не имеет физического смысла, так как частота всегда положительная величина.

$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ – резонансная частота. Для диссипативной системы $\Omega_{\text{рез}}$ несколько меньше собственной частоты ω_0 .

Подставив $\Omega_{\text{рез}}$ в выражение (9.19), получим формулу для резонансной амплитуды:

$$A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Проанализируем выражение для резонансной амплитуды:

при $\beta \rightarrow 0$, то есть в отсутствие сопротивления, $A_{\text{рез}} \rightarrow \infty$;

при очень малом затухании ($\beta \ll \omega_0$) $\Omega_{\text{рез}} \approx \omega_0$, $A_{\text{рез}} \approx \frac{f_0}{2\beta\omega_0} = \frac{F_0}{2m\beta\omega_0}$;

с увеличением коэффициента затухания β явление резонанса проявляется все слабее. При очень большом затухании $2\beta^2 > \omega_0^2$ или $\beta > \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ максимума АЧХ не существует, и амплитуда монотонно убывает с увеличением частоты Ω (см. рис. 9.12).

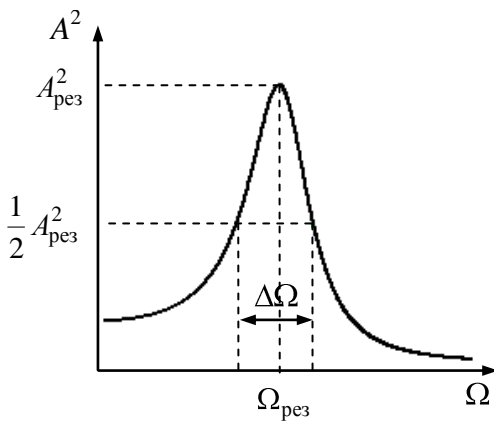


Рис. 9.13

Ширина резонансной кривой $\Delta\Omega$ показывает, насколько резко убывает амплитуда колебаний при отклонении от резонанса (рис. 9.13). Ее величина определяется относительно квадрата амплитуды, так как энергия колебаний пропорциональна A^2 .

Ширина резонансной кривой связана с характеристиками системы выражением

$$\Delta\Omega = 2\beta = \frac{\omega_0}{Q},$$

где Q – добротность системы. Увеличение коэффициента затухания приводит к существенному увеличению ширины резонансной кривой.

Для характеристики зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты используют коэффициент динамичности. Запишем коэффициент динамичности через коэффициент частотной расстройки z и относительный коэффициент демпфирования ε , используя формулы (9.19):

$$\eta = \frac{A}{A_{\text{ст}}} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} \frac{\omega_0^2}{f_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\varepsilon^2 z^2}}. \quad (9.20)$$

Коэффициент динамичности при разных частотах Ω разный. При резонансе

$$\eta_{\text{рез}} = \frac{A_{\text{рез}}}{A_{\text{ст}}} = \frac{f_0}{2\beta\omega_0} \frac{\omega_0^2}{f_0} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\pi}{\lambda} = Q,$$

где λ – логарифмический декремент затухания; Q – добротность системы при затухающих колебаниях.

То есть коэффициент динамичности (при не очень большом сопротивлении $\beta \ll \omega_0$) при резонансе равен добротности системы:

$$\eta_{\text{рез}} = Q.$$

Анализ формулы (9.20) показывает, что сила сопротивления (демпфер) играет существенную роль только в резонансной зоне:

$$\frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \leq \Omega \leq \sqrt{2}\omega_0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq z \leq \sqrt{2}.$$

Резонансная кривая в относительных характеристиках (коэффициент динамичности η и коэффициент частотной расстройки z) при различных значениях относительного коэффициента демпфирования ε представлена на рис. 9.14.

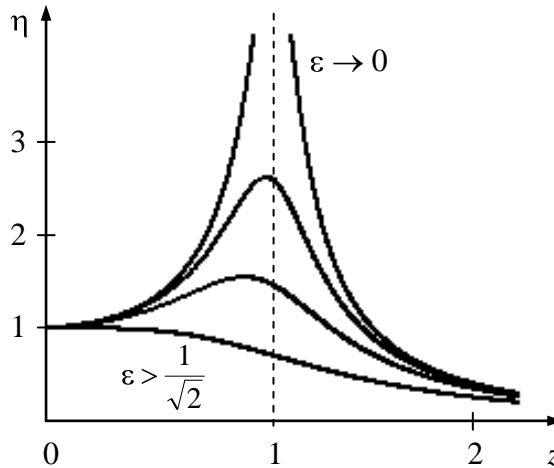


Рис. 9.14

При малых частотах ($z \ll 1$, $\Omega \ll \omega_0$) из формул (9.14), (9.15) следует:

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{m\omega_0^2}, \quad \varphi = 0,$$

и уравнение колебаний (9.17) приблизительно выглядит как

$$x = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \cos(\Omega t).$$

Главную роль в таких колебаниях играют силы упругости, которые влияют на амплитуду.

При больших частотах ($z \gg 1$, $\Omega \gg \omega_0$) из формул (9.14), (9.15) следует:

$$A = \frac{f_0}{\Omega^2 - \omega_0^2} = \frac{f_0}{\Omega_0^2} = \frac{F_0}{m\Omega_0^2}, \quad \varphi = \pi,$$

и уравнение колебаний (9.17) приближенно имеет вид

$$x = \frac{F_0}{m\Omega^2} \cos(\Omega t - \pi).$$

Здесь силы трения и силы упругости роли не играют, главную роль играют силы инерции, действующие с частотой Ω .

Мы рассмотрели упрощенную систему: однородная пружина; вязкое трение; одна степень свободы; гармоническая внешняя сила. Такой системе соответствует одна резонансная частота. Реальная механическая система обладает набором собственных частот, при малых колебаниях ведет себя как набор гармонических осцилляторов. Каждый из них может начать резонансные колебания под действием соответствующих гармонических составляющих внешней силы. Все собственные частоты надо принимать во внимание при конструировании, чтобы избежать аварий и катастроф (менять ω_0 или Ω).

9.7. Основы виброзащиты

Виброзащита – это защита строений, оборудования и человека от вредного воздействия механических колебаний, возникающих при работе машин и механизмов.

Рассмотрим четыре основных способа виброзащиты.

1. *Снижение внешней виброактивности* – это уменьшение вынуждающей силы или кинематического или инерционного воздействия. Схема внешней виброактивности приведена на рис. 9.15, где ИК – источник колебаний; ОВ – объект виброзащиты.

Одним из способов снижения виброактивности является *балансировка* – на вращающуюся деталь механизма устанавливаются противовесы, с помощью которых центр масс системы перемещается на ось вращения.

Рассмотрим некоторый механизм, имеющий вращающуюся деталь на валу (рис. 9.16а). Деталь массой m удалена от оси вращения на расстояние r , то есть ее центр тяжести не совпадает с осью вращения. При вращении детали появится центробежная сила инерции $F = ma = m\Omega^2 r$, где Ω – угловая скорость вращения. Проекции этой силы на оси координат изменяются по гармоническому закону:

$$F_x = F\cos\varphi = F\cos(\Omega t),$$

$$F_y = F\sin\varphi = F\sin(\Omega t).$$



Рис. 9.16

Неуравновешенность центробежных сил приводит к упругим периодическим колебаниям вала. При больших скоростях эти колебания вала передаются через подшипники и станину на фундамент, который может подвергнуться преждевременному разрушению.

Чтобы уравновесить силу инерции, надо центр тяжести перенести на ось вращения. Для этого крепят тело (противовес) массой $m_{\text{пр}}$ с противоположной стороны на расстоянии $r_{\text{пр}}$ (см. рис. 9.16б). Полное уравновешивание произойдет тогда, когда развиваемые массами m и $m_{\text{пр}}$ силы инерции будут равны между собой, то есть будет выполняться условие

$$mr = m_{\text{пр}}r_{\text{пр}}.$$

2. *Снижение внутренней виброактивности* – это рациональное изменение параметров системы. Схема внутренней виброактивности приведена на рис. 9.17.

В данном случае изменяют параметры системы с целью отстройки от резонансной частоты, желательно за резонансную зону (рис. 9.18, заштрихованная зона на АЧХ).

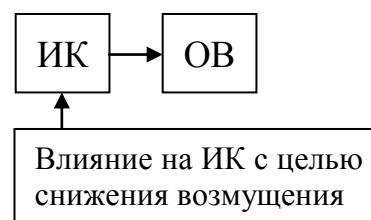


Рис. 9.15

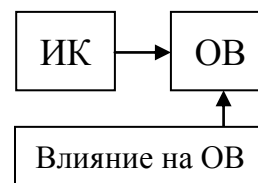


Рис. 9.17

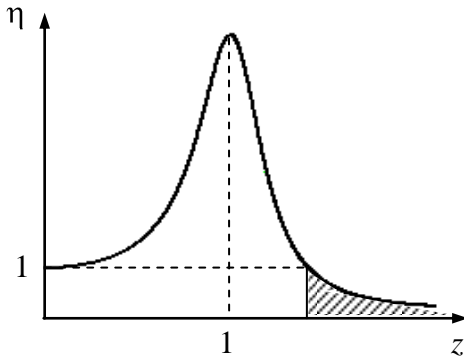


Рис. 9.18

Резонанс наблюдается при стремлении частоты внешней силы Ω к собственной частоте ω_0 . Изменение параметров системы, например массы m или жесткости k , влечет за собой изменение собственной частоты:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

3. *Виброизоляция (амортизация)*. Колебания, возникающие при работе различного рода машин и механизмов, передаются прилегающим конструкциям и объектам, что нарушает нормальную работу других устройств, а также вредно влияет на здоровье человека. Кроме того, часто приходится устанавливать различные приборы и другие объекты на колеблющемся основании. При этом, как правило, требуется изолировать объект от основания так, чтобы ему не передавались колебания последнего.

В обоих случаях задача виброизоляции (ВИ) решается одинаково – между объектом (ИК) и основанием (ОВ) устанавливают упругие элементы, а иногда и демпферы сухого или вязкого трения. Схема виброизоляции приведена на рис. 9.19.



Рис. 9.19

Системы виброизоляции делятся на два вида:

активные – системы амортизации, устанавливаемые между источником вибрации и основанием для защиты основания (строения) от колебаний (при силовом или инерционном возбуждении);

пассивные – системы амортизации, устанавливаемые между устройством и основанием (при кинематическом возбуждении колебаний из-за вибрации основания). Пассивные системы амортизации служат для защиты оборудования или человека от колебаний при вибрации фундамента или при транспортировке.

4. *Динамическое гашение (или динамическая разгрузка)*. Схема динамического гашения приведена на рис. 9.20.

Станок или какой-либо механизм, находящийся под действием периодического возмущения, может испытывать значительные колебания, особенно в областях частот,

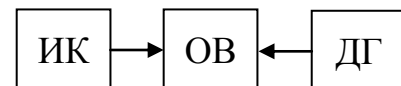


Рис. 9.20

близких к резонансным. Попытки избежать условий резонанса за счет изменения массы или жесткости могут быть связаны с существенными конструктивными изменениями основной системы. Поэтому при внешнем возмущении постоянной частоты бывает эффективным применение динамических гасителей колебаний (другого источника колебаний). Благодаря установке гасителя частично устраняются колебания основной системы.

9.8. Активная система амортизации

Назначение активной системы амортизации – уменьшение силы, действующей на основание (фундамент), которое здесь является объектом виброзащиты.

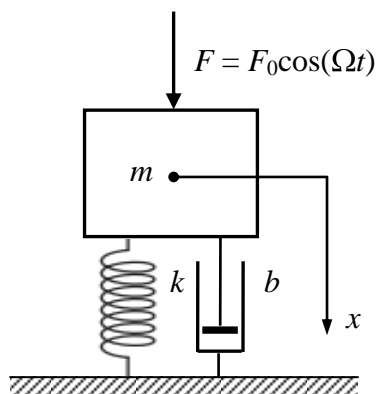


Рис. 9.21

Система амортизации (рис. 9.21) состоит из упругого элемента жесткостью k и демпфера с коэффициентом сопротивления b . Движение тела массой m под действием гармонической силы $F = F_0 \cos(\Omega t)$, где F_0 – амплитуда внешней силы; Ω – циклическая частота внешней силы, описывается дифференциальным уравнением вынужденных колебаний:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos(\Omega t),$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\Omega t),$$

где $\beta = \frac{b}{2m}$ – коэффициент затухания; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – собственная частота;

$f_0 = \frac{F_0}{m}$ – амплитуда приведенной силовой характеристики.

Вынужденные колебания (установившиеся) описываются уравнением

$$x = A \cos(\Omega t - \varphi),$$

где амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} \quad \text{или} \quad A = \frac{F_0}{\sqrt{(k - \Omega^2 m)^2 + b^2 \Omega^2}}. \quad (9.21)$$

На основание через упругий элемент и демпфер передается усилие (дополнительно к силе тяжести тела mg):

$$F_1 = kx + b\dot{x},$$

где $\dot{x} = -A\Omega \sin(\Omega t - \varphi)$ – скорость тела.

Подставим в это уравнение x и \dot{x} :

$$F_1 = kA \cos(\Omega t - \varphi) - bA\Omega \sin(\Omega t - \varphi).$$

Это выражение можно преобразовать к гармоническому виду:

$$F_1 = F_{01} \cos(\Omega t - \varphi + \varphi_1),$$

где $F_{01} = A\sqrt{k^2 + b^2\Omega^2}$ – амплитуда усилия, передаваемого на основание, $\varphi_1 = \arctg \frac{b\Omega}{k}$.

Введем понятие *коэффициент амортизации* – отношение амплитуды силы, передаваемой основанию, к амплитуде возмущающей силы:

$$\alpha = \frac{F_{01}}{F_0}.$$

Чтобы система амортизации выполняла свое назначение, то есть ослабляла колебания, коэффициент амортизации должен быть меньше 1 ($\alpha < 1$).

Коэффициент амортизации можно выразить в относительных величинах через относительный коэффициент демпфирования ε и коэффициент частотной расстройки z с учетом выражения (9.21):

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{A\sqrt{k^2 + b^2\Omega^2}}{F_0} = \frac{\sqrt{k^2 + b^2\Omega^2}}{\sqrt{(k - \Omega^2 m)^2 + b^2\Omega^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{1 + 4\varepsilon^2 z^2}}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\varepsilon^2 z^2}}, \end{aligned} \tag{9.22}$$

где $\varepsilon = \frac{\beta}{\omega_0}$, $z = \frac{\Omega}{\omega_0}$.

Из этого равенства видно, что $\alpha < 1$ при условии $(1 - z^2)^2 > 1$, следовательно, $z > \sqrt{2}$ или $\Omega > \sqrt{2}\omega_0$.

При $z < \sqrt{2}$ коэффициент амортизации $\alpha > 1$ и виброизоляция своей функции не выполняет.

На рис. 9.22 показан график зависимости коэффициента амортизации α от коэффициента частотной расстройки z .

Например, при $z = 5$, $\varepsilon \rightarrow 0$ согласно формуле (9.22) коэффициент амортизации $\alpha = 0,042 = \frac{1}{24}$, то есть амортизация ослабляет усилие на ос-

нование в 24 раза. При $z = 5$, $\varepsilon = 0,25$ $\alpha = 0,111 = \frac{1}{9}$, то есть в 9 раз.

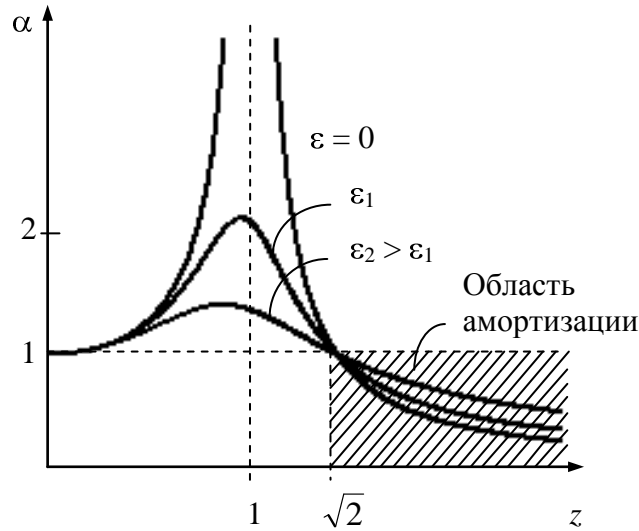


Рис. 9.22

В идеале для тела заданной массы должны быть малыми и собственная частота (малая жесткость), и коэффициент затухания (малое демпфирование), то есть α мал. Но системы с $\beta \rightarrow 0$ применять нельзя, так как может возникнуть резонанс с очень большой амплитудой на частоте одной из неучтенных вибраций; кроме того, уменьшение β увеличивает продолжительность переходных процессов, так как $\tau_{\text{пер}} = 1/\beta$.

9.9. Пассивная система амортизации

Система амортизации (рис. 9.23) состоит из упругого элемента жесткостью k и демпфера с коэффициентом сопротивления b .

Назначение пассивной системы амортизации – уменьшение амплитуды колебаний тела массой m , которое является объектом виброзащиты.

Пусть корпус (основание) колеблется по закону

$$x_{\text{к}} = A \cos(\Omega t),$$

где A и Ω – амплитуда и циклическая частота колебаний корпуса.

На тело через упругий элемент и демпфер действуют силы упругости и вязкого трения:

$$F_1 = -k(x - x_{\text{к}}) - b(\dot{x} - \dot{x}_{\text{к}}),$$

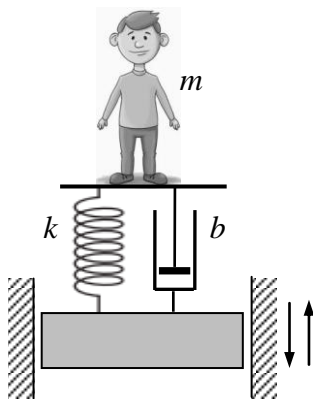


Рис. 9.23

где $(x - x_{\text{к}})$ – перемещение тела по отношению к неподвижной системе координат; $(\dot{x} - \dot{x}_{\text{к}})$ – относительная скорость. Движение тела описывается дифференциальным уравнением вынужденных колебаний:

$$m\ddot{x} = -k(x - x_k) - b(\dot{x} - \dot{x}_k),$$

где $\dot{x}_k = -A\Omega \sin(\Omega t)$ – скорость корпуса.

Подставим в это уравнение x и \dot{x} и перегруппируем слагаемые:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = kA \cos(\Omega t) - bA\Omega \sin(\Omega t).$$

Это выражение можно преобразовать к виду

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos(\Omega t + \varphi_1),$$

где $F_0 = A\sqrt{k^2 + b^2\Omega^2}$, $\varphi_1 = \arctg \frac{b\Omega}{k}$.

Полученное выражение является дифференциальным уравнением вынужденных колебаний. Выражение для вынужденных колебаний тела массой m , соответствующее этому дифференциальному уравнению:

$$x = A_1 \cos(\Omega t - \varphi + \varphi_1),$$

где амплитуда вынужденных колебаний тела

$$A_1 = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} = \frac{A\sqrt{k^2 + b^2\Omega^2}}{\sqrt{(k - \Omega^2 m)^2 + b^2\Omega^2}}.$$

Коэффициент амортизации при пассивной амортизации – отношение амплитуды колебания тела массой m к амплитуде колебания корпуса:

$$\alpha = \frac{A_1}{A}.$$

Коэффициент амортизации можно выразить в относительных величинах через относительный коэффициент демпфирования ε и коэффициент частотной расстройки z :

$$\alpha = \frac{A_1}{A} = \frac{\sqrt{k^2 + b^2\Omega^2}}{\sqrt{(k - \Omega^2 m)^2 + b^2\Omega^2}} = \frac{\sqrt{1 + 4\varepsilon^2 z^2}}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\varepsilon^2 z^2}}. \quad (9.23)$$

Полученная формула полностью совпадает с выражением (9.22), то есть требования к амортизатору при пассивной системе амортизации те же, что и при активной системе амортизации.

Чтобы система пассивной амортизации выполняла свое назначение, коэффициент амортизации α должен быть < 1 . Это, как видно из равенства (9.23), будет выполняться при $z > \sqrt{2}$ или $\Omega > \sqrt{2}\omega_0$. Области амортизации для пассивной и активной систем совпадают (см. рис. 9.22).

Заметим, что уменьшение амплитуды вынужденных колебаний тела по отношению к неподвижной системе координат путем уменьшения жесткости k увеличивает амплитуду колебаний этого тела по отношению к корпусу, которая может достичь недопустимо больших величин.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие колебания называются вынужденными?
2. Перечислите способы воздействия на колебательную систему для возбуждения вынужденных колебаний. В чем они заключаются?
3. Приведите вывод дифференциального уравнения вынужденных колебаний под действием гармонической силы в системе без трения. Расшифруйте обозначения величин, входящих в это уравнение.
4. Запишите решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний в системе без трения. Проанализируйте, что представляет собой решение в данном случае?
5. Запишите уравнение вынужденных колебаний без трения. Являются ли они гармоническими?
6. От каких факторов зависят частота, амплитуда и фаза вынужденных колебаний в системе без трения?
7. Что называется статической амплитудой?
8. Что называется АЧХ и ФЧХ осциллятора?
9. Что называется коэффициентом частотной расстройки?
10. Что называется коэффициентом динамичности? Каков график его зависимости от коэффициента частотной расстройки?
11. При каком условии при вынужденных колебаниях наблюдаются биения?
12. В чем состоит явление резонанса? При каких условиях возникает резонанс?
13. Приведите вывод дифференциального уравнения вынужденных колебаний в системе с вязким трением и гармоническим возбуждением. Расшифруйте обозначения величин, входящих в это уравнение.
14. Проиллюстрируйте применение векторной диаграммы при решении дифференциального уравнения вынужденных колебаний в системе с вязким трением.
15. Запишите решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний в системе с вязким трением. Проанализируйте, что представляет собой решение в данном случае?
16. Запишите уравнение установившихся вынужденных колебаний в системе с вязким трением. Являются ли они гармоническими?
17. От каких факторов зависят частота, амплитуда и фаза вынужденных колебаний в системе с вязким трением?
18. Какой вид имеет график вынужденных колебаний в системе с вязким трением?
19. Чему равно время установления вынужденных колебаний?
20. Какие вынужденные колебания называются колебаниями малой частоты и какие – колебаниями большой частоты? Чем характеризуется тот и другой вид колебаний?
21. Как выглядят АЧХ и ФЧХ вынужденных колебаний в системе с вязким трением и без трения?

22. Что называется коэффициентом демпфирования?
23. Что называется резонансной кривой?
24. Изобразите резонансную кривую в относительных характеристиках.
25. Как изменится вид резонансной кривой при увеличении коэффициента затухания?
26. Чему равна резонансная частота? От чего она зависит?
27. Чему равна резонансная амплитуда? От чего она зависит?
28. Чему равен сдвиг фаз между смещением и вынуждающей силой при резонансе?
29. Что такое ширина резонансной кривой? Как она связана с другими характеристиками колебательной системы?
30. Какие свойства колебательной системы при затухающих и при вынужденных колебаниях характеризует добротность?
31. Как следует рациональным образом изменять параметры системы в дорезонансном и зарезонансном режимах?
32. Приведите примеры вредного проявления резонанса. Какими способами можно предотвратить резонанс?
33. Перечислите основные способы виброзащиты. В чем они заключаются?
34. В чем назначение активной системы амортизации?
35. Чему равна амплитуда усилия, передаваемого на основание, при активной амортизации?
36. В чем назначение пассивной системы амортизации?
37. Что представляет собой коэффициент амортизации при активной и пассивной амортизациях?
38. Какому отношению частоты возбуждения Ω к собственной частоте системы ω_0 соответствует область защиты от вредного воздействия вибраций (виброзащиты)?

ГЛАВА 10. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ. СВЯЗАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Число степеней свободы равно числу независимых координат, однозначно определяющих состояние механической системы, или, другими словами, числу независимых перемещений.

Примеры колебательных систем с двумя степенями свободы приведены на рис. 10.1.

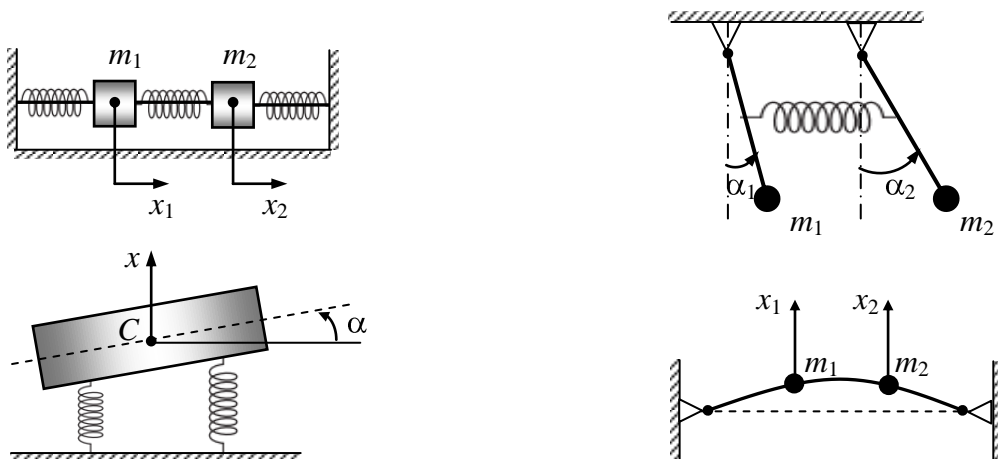


Рис. 10.1

Сложную систему с двумя степенями свободы можно рассматривать как систему, состоящую из двух отдельных условных колебательных систем с одной степенью свободы каждая, связанных друг с другом, то есть когда колебания одной системы влияют на колебания другой.

10.1. Сложение гармонических колебаний, происходящих в двух взаимно перпендикулярных направлениях

Колебательная система может одновременно участвовать в нескольких колебательных процессах одновременно, если в ней действуют две или несколько упругих сил. Любое движение можно представить как сумму двух или более движений, имеющих разные направления. Колебания считаются одинаково направленными, если они происходят в одной плоскости вдоль параллельных прямых. Колебания считаются *перпендикулярными*, если они происходят в одной плоскости вдоль взаимно перпендикулярных прямых. При колебаниях этого тела могут изменяться координаты тела в плоскости, то есть координаты x и y . В этом случае колеблющееся тело обладает двумя степенями свободы. Под *сложением колебаний* понимают нахождение закона движения – зависимости $y(x)$ – тела, участвующего одновременно в нескольких колебательных процессах.

Рассмотрим колебания точки массой m под действием сил упругости в плоскости, в которой лежат пружины (рис. 10.2). Точка может совершать колебания одновременно вдоль одной оси и вдоль другой оси, перпендикулярной первой. Если возбудить оба колебания, выводя точку из положения равновесия, то она будет двигаться по некоторой криволинейной траектории, форма которой зависит от соотношения амплитуд, частот и разности фаз обоих колебаний.

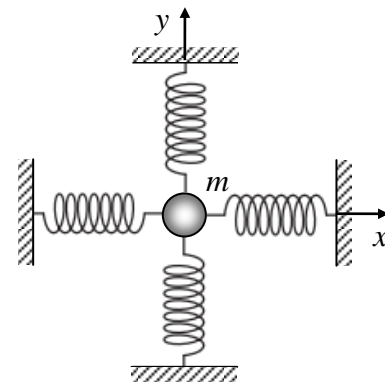


Рис. 10.2

Рассмотрим результат сложения двух колебаний вдоль осей x и y , описываемых гармоническими уравнениями:

$$x = A_x \cos(\omega_x t + \varphi_x), \quad (10.1)$$

$$y = A_y \cos(\omega_y t + \varphi_y),$$

где A_x и A_y – амплитуды; ω_x и ω_y – частоты; φ_x и φ_y – начальные фазы колебаний; t – время.

Результирующее движение будет описываться уравнением траектории, которое можно получить, исключив из системы уравнений (10.1) параметр t . Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний не одинако-

вы, то траектории результирующего движения представляют собой фигуры сложной формы. Замкнутые траектории, прочерчиваемые точкой, совершающей одновременно два взаимно перпендикулярных колебания, называются *фигурами Лиссажу*. Фигуры Лиссажу вписываются в прямоугольник со сторонами $2A_x$ и $2A_y$, центр которого совпадает с началом координат. Формы некоторых траекторий и соответствующие им уравнения рассмотрены ниже.

Сложение перпендикулярных колебаний одинаковой частоты. Наиболее простой вид имеет уравнение движения, если точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях с одинаковыми частотами $\omega_x = \omega_y = \omega$. Начало отсчета времени всегда можно выбрать так, чтобы начальная фаза одного из колебаний была равна нулю, тогда уравнения колебаний (10.1) запишутся следующим образом:

$$x = A_x \cos(\omega t), \quad (10.2)$$

$$y = A_y \cos(\omega t + \varphi),$$

где φ – разность фаз складываемых колебаний.

Воспользовавшись тригонометрической формулой разложения \cos суммы двух углов, приведем уравнения колебаний (10.2) к виду:

$$\frac{x}{A_x} = \cos(\omega t), \quad (10.3)$$

$$\frac{y}{A_y} = \cos(\omega t) \cos \varphi - \sin(\omega t) \sin \varphi. \quad (10.4)$$

Из уравнения (10.3) следует, что

$$\cos(\omega t) = \frac{x}{A_x}, \quad \sin(\omega t) = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A_x}\right)^2} \quad (10.5)$$

Подставляя выражения (10.5) в уравнение (10.4), получим после математических преобразований уравнение траектории в виде

$$\left(\frac{x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_y}\right)^2 - \frac{2xy}{A_x A_y} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (10.6)$$

Из аналитической геометрии известно, что уравнение (10.6) есть уравнение эллипса, оси которого ориентированы относительно координат-

ных осей x и y произвольно (рис. 10.3а). Ориентация осей эллипса и его размеры зависят от амплитуд A_x , A_y и разности фаз φ складываемых колебаний.

Точка описывает эллипс за время, равное периоду складываемых колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Исследуем форму траектории в некоторых частных случаях.

1. Если $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, то уравнение траектории (10.6) примет вид

$$\left(\frac{x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_y}\right)^2 = 1.$$

Это уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат x и y , а размеры его полуосей равны соответственно амплитудам A_x и A_y . При равенстве амплитуд A_x и A_y эллипс вырождается в окружность.

Случаи $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ и $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ отличаются направлением движения точки по траектории. Если $\varphi = +\frac{\pi}{2}$, то уравнения (10.2) можно записать следующим образом:

$$x = A_x \cos(\omega t),$$

$$y = -A_y \sin(\omega t).$$

Из этих уравнений следует, что в момент $t = 0$ координаты точки $x_0 = A_x$ и $y_0 = 0$. В последующие моменты времени координата x уменьшается, а координата y становится отрицательной. Следовательно, движение совершается по часовой стрелке. Если $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ — движение против часовой стрелки.

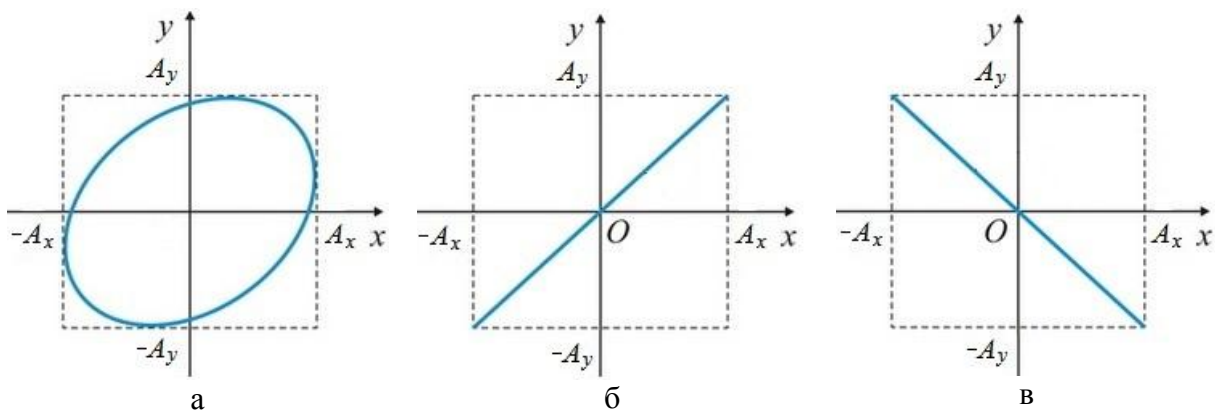


Рис. 10.3

2. Если $\varphi = 0$ или $\varphi = \pm\pi$, то эллипс вырождается в отрезок прямой, проходящей через начало координат. Уравнение траектории (10.6) в данном случае примет вид

$$y = \pm \frac{A_y}{A_x} x.$$

В этом уравнении знак «+» соответствует разности фаз $\varphi = 0$, то есть сложению колебаний, происходящих в одной фазе (см. рис. 10.3б), а знак «-» соответствует $\varphi = \pm\pi$, то есть сложению колебаний, происходящих в противофазе (см. рис. 10.3в).

Сложение перпендикулярных колебаний с кратными частотами. Проанализируем, как будет выглядеть траектория результирующего движения, когда частоты колебаний ω_x и ω_y соотносятся как целые числа. Пусть разность фаз $\varphi = 0$. Тогда уравнения колебаний будут иметь вид:

$$x = A_x \cos(\omega_x t), \quad (10.7)$$

$$y = A_y \cos(\omega_y t). \quad (10.8)$$

Случай $\omega_x:\omega_y = 1:1$ соответствует движению точки по эллипсу и рассмотрен в предыдущем разделе.

Рассмотрим сложение колебаний при соотношении частот $\omega_x:\omega_y = 1:2$ и $\omega_x:\omega_y = 1:3$.

Чтобы получить уравнение траектории движения тела, уравнение колебаний (10.8) раскладывают с помощью тригонометрических тождеств на степени $\cos(\omega t)$, например $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$; $\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ и т.д. Затем в него подставляют значение $\cos(\omega t)$, выраженного из уравнения (10.7), и преобразовывают. Таким образом, были получены уравнения движения при сложении взаимно перпендикулярных колебаний

при $\omega_x:\omega_y = 1:2$

$$\frac{y}{A_y} = 2 \frac{x^2}{A_x^2} - 1,$$

при $\omega_x:\omega_y = 1:3$

$$\frac{y}{A_y} = 4 \frac{x^3}{A_x^3} - 3 \frac{x}{A_x}.$$

Вид соответствующих траекторий представлен на рис. 10.4а и 10.4б. Траектории имеют вид незамкнутых кривых, по которым точка совершает периодическое движение.

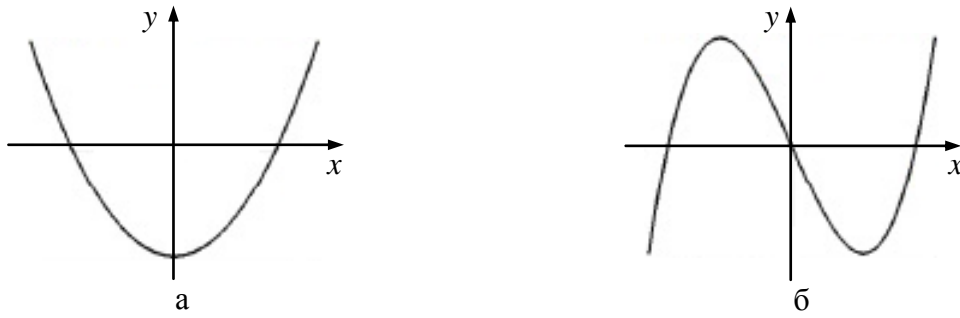


Рис. 10.4

В случае обратного соотношения частот $\omega_x:\omega_y = 2:1, 3:1$, рассуждая аналогично, получим уравнения траектории, соответствующие таким же кривым, что и в предыдущем случае, только повернутым на 90° .

Отношение частот складываемых колебаний равно отношению числа пересечений фигур Лиссажу с прямыми, параллельными осям координат. Для этого необходимо определить наибольшее возможное число пересечений вертикальной и горизонтальной прямых с наблюдаемой фигурой. Например, если вертикальная прямая пересекает фигуру шесть раз, а горизонтальная – два (рис. 10.5а), то это означает, что $\omega_x:\omega_y = 6:2 = 3$, то есть частота колебаний вдоль оси x в три раза больше, чем вдоль оси y . Фигура, изображенная на рис. 10.5б, соответствует $\omega_x:\omega_y = 4:6 = 2:3$.

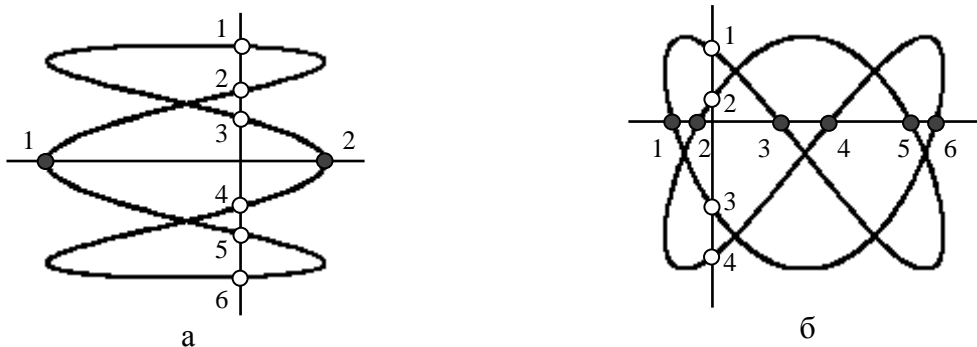


Рис. 10.5

В технике фигуры Лиссажу применяют для определения неизвестной частоты колебания. Для этого это колебание складывают с взаимно перпендикулярным колебанием известной частоты и определяют частоту неизвестного колебания по виду фигур Лиссажу.

10.2. Собственные незатухающие колебания в консервативной системе

Рассмотрим колебания в связанной системе на примере двух маятников, соединенных упругой связью (рис. 10.6). Маятники состоят из невесомых стержней длиной l_1 и l_2 , связанных пружиной с коэффициентом жесткости k , и закрепленных на них грузов массой m_1 и m_2 . Расстояние от оси подвеса до точки крепления пружины – b .

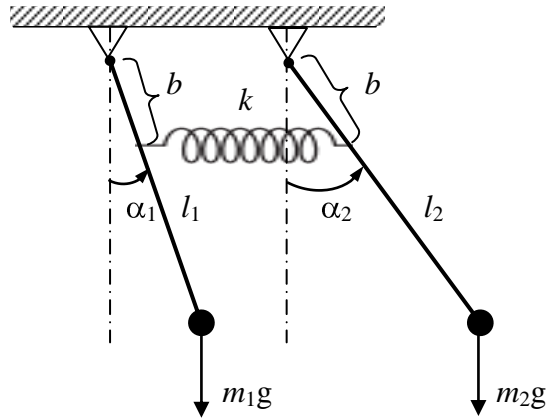


Рис. 10.6

При движении маятников в одной вертикальной плоскости состояние такой системы полностью описывается двумя независимыми параметрами – углами отклонения α_1 и α_2 маятников от положения равновесия, то есть система имеет две степени свободы.

Основное уравнение вращательного движения 1-го маятника:

$$J_1 \ddot{\alpha}_1 = \Sigma M_1,$$

где момент инерции материальной точки относительно оси подвеса $J_1 = m_1 l_1^2$; угловое ускорение $\ddot{\alpha}_1 = \frac{d^2 \alpha_1}{dt^2}$; сумма моментов внешних сил – момента силы тяжести $M_{\text{тяж}}$ и момента силы упругости $M_{\text{упр}}$:

$$\begin{aligned} \Sigma M_1 &= M_{\text{тяж}} + M_{\text{упр}} = \\ &= -m_1 g l_1 \sin \alpha_1 + k b (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) b \cos \alpha_1, \end{aligned}$$

где $l_1 \sin \alpha_1$ – плечо силы тяжести; $b(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)$ – растяжение пружины; $b \cos \alpha_1$ – плечо силы упругости.

С учетом того, что при малых углах отклонения $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2 \approx 1$ и $\sin \alpha \approx \alpha$, выражение для момента сил можно представить в виде

$$\Sigma M_1 = -m_1 g l_1 \alpha_1 + k b^2 (\alpha_2 - \alpha_1).$$

Запишем дифференциальное уравнение движения 1-го маятника:

$$m_1 l_1^2 \ddot{\alpha}_1 = -m_1 g l_1 \alpha_1 + k b^2 (\alpha_2 - \alpha_1).$$

Преобразуем полученное уравнение:

$$\ddot{\alpha}_1 + \left(\frac{g}{l_1} + \frac{kb^2}{m_1 l_1^2} \right) \alpha_1 - \frac{kb^2}{m_1 l_1^2} \alpha_2 = 0.$$

Аналогично запишем дифференциальное уравнение движения 2-го маятника:

$$\ddot{\alpha}_2 + \left(\frac{g}{l_2} + \frac{kb^2}{m_2 l_2^2} \right) \alpha_2 - \frac{kb^2}{m_2 l_2^2} \alpha_1 = 0.$$

Введем обозначения:

$$\omega_{п1} = \sqrt{\frac{g}{l_1} + \frac{kb^2}{m_1 l_1^2}}, \quad \omega_{п2} = \sqrt{\frac{g}{l_2} + \frac{kb^2}{m_2 l_2^2}},$$

$$c_1 = \frac{kb^2}{m_1 l_1^2}, \quad c_2 = \frac{kb^2}{m_2 l_2^2},$$

где $\omega_{п1}$ и $\omega_{п2}$ – парциальные частоты; c_1 и c_2 – коэффициенты связи.

С учетом введенных обозначений получим систему дифференциальных уравнений:

$$\ddot{\alpha}_1 + \omega_{п1}^2 \alpha_1 - c_1 \alpha_2 = 0,$$

$$\ddot{\alpha}_2 + \omega_{п2}^2 \alpha_2 - c_2 \alpha_1 = 0.$$

Парциальные частоты – это собственные частоты колебаний парциальных систем.

Парциальная система (соответствующая данной степени свободы) – это условная система с одной степенью свободы, которая получится, если задать равными нулю все координаты, соответствующие другим степеням свободы.

В данном случае парциальная частота – это частота колебаний одного маятника, когда другой жестко закреплен (рис. 10.7).

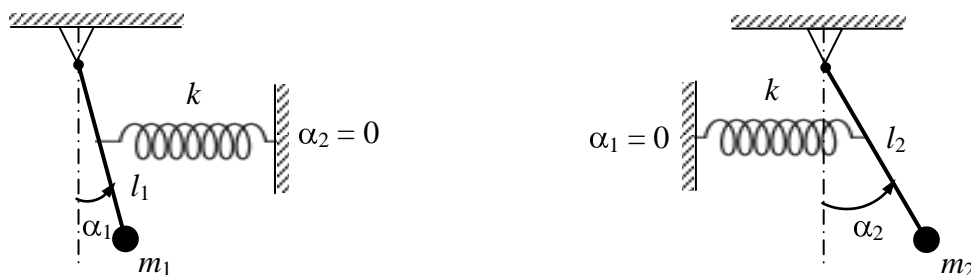


Рис. 10.7

Дифференциальные уравнения парциальных систем можно получить непосредственно из дифференциальных уравнений исходной системы, если положить равными нулю коэффициенты связи $c_1 = c_2 = 0$:

$$\ddot{\alpha}_1 + \omega_{\Pi 1}^2 \alpha_1 = 0,$$

$$\ddot{\alpha}_2 + \omega_{\Pi 2}^2 \alpha_2 = 0.$$

Для простоты положим, что маятники одинаковые: $m_1 = m_2 = m$; $l_1 = l_2 = l$; $c_1 = c_2 = c$, тогда дифференциальные уравнения примут вид:

$$\ddot{\alpha}_1 + \left(\frac{g}{l} + \frac{kb^2}{ml^2} \right) \alpha_1 - \frac{kb^2}{ml^2} \alpha_2 = 0, \quad (10.9)$$

$$\ddot{\alpha}_2 + \left(\frac{g}{l} + \frac{kb^2}{ml^2} \right) \alpha_2 - \frac{kb^2}{ml^2} \alpha_1 = 0.$$

Складывая и вычитая эти уравнения, получим два уравнения соответственно:

$$\frac{d^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{dt^2} + \frac{g}{l}(\alpha_1 + \alpha_2) = 0,$$

$$\frac{d^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{dt^2} + \left(\frac{g}{l} + 2 \frac{kb^2}{ml^2} \right) (\alpha_1 - \alpha_2) = 0.$$

Данные уравнения имеют стандартный вид дифференциальных уравнений гармонических колебаний с циклическими частотами:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2 \frac{kb^2}{ml^2}}. \quad (10.10)$$

Общее решение системы уравнений (10.9) имеет вид:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \\ \alpha_2 &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (10.11)$$

Из решения видно, что при произвольных начальных условиях каждый из маятников совершает сложное периодическое негармоническое

движение, которое можно представить в виде суммы двух гармонических колебаний с частотами ω_1 и ω_2 . Эти частоты называются собственными (нормальными) частотами колебательной системы, потому что они зависят от параметров системы (l, k, m, b) и не зависят от начальных условий.

Для системы с двумя степенями свободы необходимо задать четыре начальных условия: начальные углы отклонения от положения равновесия α_{10}, α_{20} и начальные угловые скорости $\dot{\alpha}_{10}, \dot{\alpha}_{20}$, которые позволяют однозначно определить четыре произвольных постоянных: амплитуды колебаний A_1, A_2 и начальные фазы колебаний φ_1, φ_2 .

При определенных заданных начальных условиях оба маятника могут совершать гармонические колебания с одинаковыми частотами, либо с собственной частотой ω_1 , либо с собственной частотой ω_2 .

Колебания, при которых оба маятника колеблются с одной и той же частотой ω_1 или ω_2 , называются *главными колебаниями*. Частоты таких колебаний называются *нормальными частотами*.

Конфигурации системы, соответствующие главным колебаниям, называются *собственными формами колебаний*. Число форм колебаний равно числу степеней свободы системы. Колебания с частотой ω_1 ($\omega_1 < \omega_2$) – первая главная форма, с частотой ω_2 – вторая главная форма колебаний. Примеры главных форм колебаний приведены на рис. 10.8.

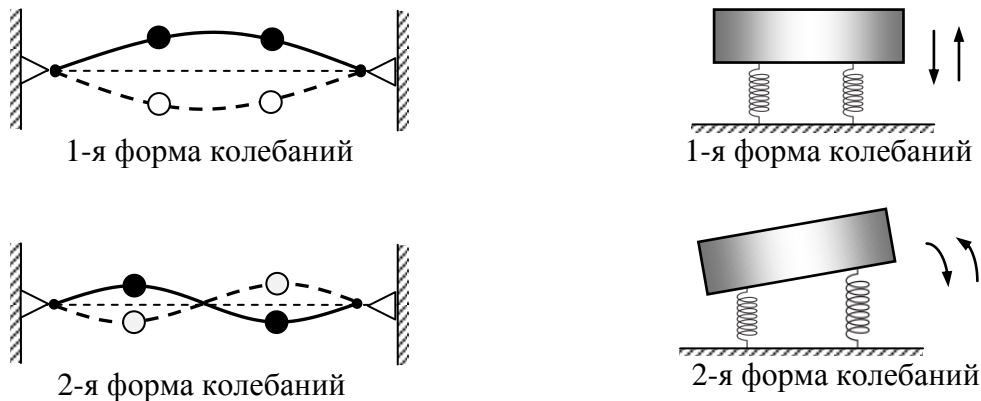


Рис. 10.8

Нормальные (главные) колебания для системы из двух связанных маятников могут происходить синфазно с частотой ω_1 и антифазно с частотой ω_2 .

1. *Синфазные колебания* – это колебания маятников, происходящие в одной фазе с меньшей из нормальных частот.

Синфазные колебания наблюдаются (рис. 10.9а) при начальных условиях: оба маятника отклонены в одну сторону на один и тот же угол и имеют одинаковые по величине и направлению начальные скорости: $\alpha_{10} = \alpha_{20}$;

$\dot{\alpha}_{10} = \dot{\alpha}_{20}$. Данным начальным условиям соответствуют уравнения колебаний (10.11) при $A_2 = 0$:

$$\alpha_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1),$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1).$$

Из данных уравнений видно, что разность фаз колебаний маятников равна 0, то есть колебания происходят *в одной фазе*.

Графики синфазных колебаний представлены на рис. 10.9б.

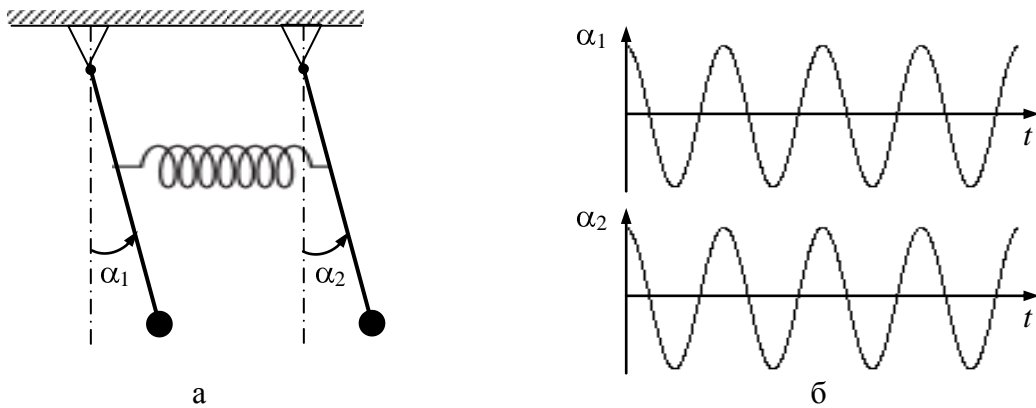


Рис. 10.9

Роль связи при таких колебаниях исчезает, так как пружина, связывающая маятники, не будет при их движении деформироваться. Частота обоих маятников меньше из собственных (нормальных) частот (см. формулы (10.10)):

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Период синфазных колебаний связанных маятников можно рассчитать через соответствующую частоту:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}.$$

2. Антифазные колебания – это колебания маятников, происходящие в противофазе с большей из нормальных частот.

Антифазные колебания наблюдаются (рис. 10.10а) при начальных условиях: маятники отклонены в противоположные стороны на один и тот же угол и имеют одинаковые по модулю и противоположно направленные скорости: $\alpha_{10} = -\alpha_{20}$, $\dot{\alpha}_{10} = -\dot{\alpha}_{20}$. Согласно данным начальным условиям колебания описываются уравнениями (10.11) при $A_1 = 0$:

$$\alpha_1 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

$$\alpha_2 = -A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2 + \pi).$$

Из данных уравнений видно, что разность фаз колебаний маятников равна π , то есть колебания происходят в *противофазе*.

Графики антифазных колебаний представлены на рис. 10.10б.

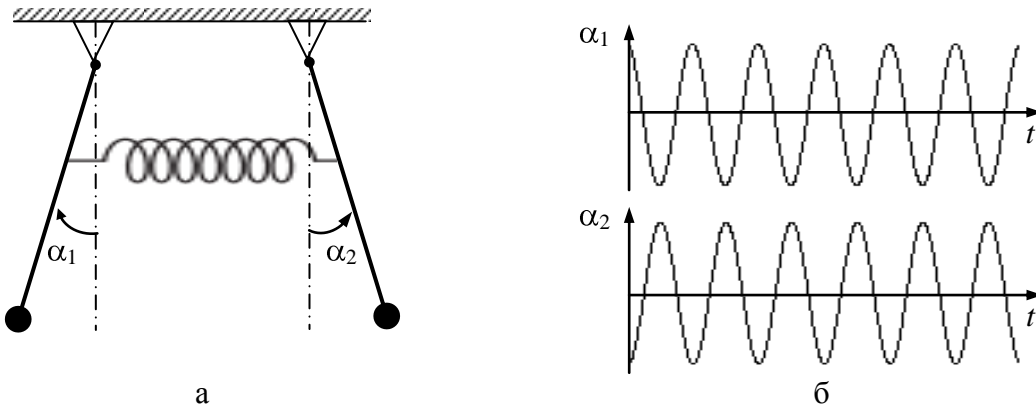


Рис. 10.10

В этом случае упругие силы со стороны пружины активно влияют на колебательный процесс. Частота обоих маятников большая из собственных (нормальных) частот (см. формулы (10.10)):

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2 \frac{kb^2}{ml^2}},$$

где l – длина маятника; k – коэффициент жесткости пружины; b – расстояние от оси подвеса до точки крепления пружины; m – масса маятника.

Периоды антифазных колебаний связанных маятников можно рассчитать через соответствующую частоту

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}.$$

Пример на свободное колебание системы с двумя степенями свободы. Корпус автомобиля массой m (рис. 10.11а) соединен с колесами рессорами, имеющими жесткость k_1 и k_2 . Расстояния от центра масс корпуса C до подвесок равны l_1 и l_2 . Определим частоты главных колебаний корпуса автомобиля относительно поперечной оси, проходящей через центр масс, в продольной плоскости, пренебрегая упругостью шин. Момент инерции корпуса относительно этой оси равен J .

Предположим, что деформации самого кузова пренебрежительно малы. Поэтому в динамической схеме корпус автомобиля будем рассматривать как абсолютно жесткий горизонтальный стержень (рис. 10.11б). Такая система обладает двумя степенями свободы, за обобщенные координаты примем вертикальное перемещение центра масс x и угол поворота стержня α вокруг центра масс C .

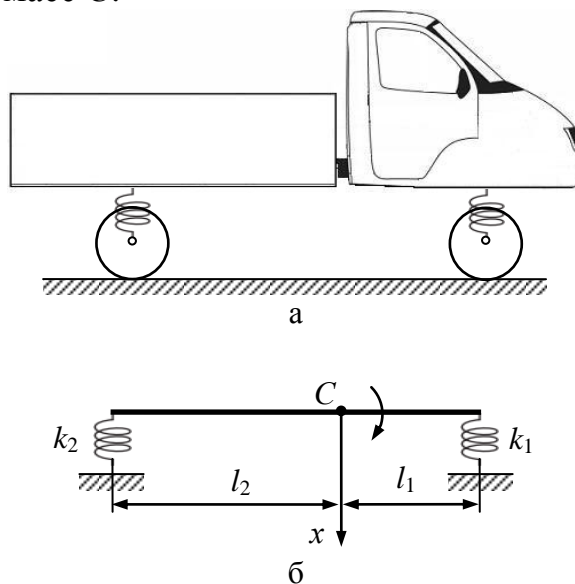


Рис. 10.11

Запишем уравнения поступательного движения центра масс и вращения стержня в дифференциальной форме:

$$m\ddot{x} = -(k_1 + k_2)x - (k_1l_1 - k_2l_2)\alpha, \quad (10.12)$$

$$J\ddot{\alpha} = -(k_1l_1 - k_2l_2)x - (k_1l_1^2 + k_2l_2^2)\alpha,$$

где \ddot{x} и $\ddot{\alpha}$ – ускорение центра масс и угловое ускорение стержня; $(k_1 + k_2)x$ – сила упругости, вызванная вертикальным смещением центра масс (стержня) на величину x ; $(k_1l_1 - k_2l_2)\alpha$ – сила упругости, вызванная поворотом стержня вокруг оси на угол α .

Введем обозначения:

$$c_1 = k_1 + k_2, \quad c_2 = k_1l_1 - k_2l_2, \quad c_3 = k_1l_1^2 + k_2l_2^2$$

и перепишем систему дифференциальных уравнений (10.12):

$$m\ddot{x} = -c_1x - c_2\alpha, \quad (10.13)$$

$$J\ddot{\alpha} = -c_2x - c_3\alpha.$$

Частные решения системы уравнений (10.13) будем искать в виде:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi),$$

$$\alpha = B \cos(\omega t + \varphi).$$

Обозначим отношение обобщенных координат, равное отношению амплитуд колебаний частных решений, через коэффициент γ :

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{A}{B} = \gamma,$$

тогда обобщенные координаты и их вторые производные примут вид:

$$x = \gamma B \cos(\omega t + \varphi), \quad \ddot{x} = -\gamma B \omega^2 \cos(\omega t + \varphi),$$

$$\alpha = B \cos(\omega t + \varphi), \quad \ddot{\alpha} = -B \omega^2 \cos(\omega t + \varphi).$$

Подставив данные выражения в систему уравнений (10.13) и разделив их на $-B \cos(\omega t + \varphi)$, получим:

$$m\omega^2\gamma = c_1\gamma + c_2,$$

$$J\omega^2 = c_2\gamma + c_3.$$

После преобразований

$$\gamma = \frac{c_2}{m\omega^2 - c_1},$$

$$\gamma = \frac{J\omega^2 - c_3}{c_2}.$$

(10.14)

Решение системы уравнений (10.14) относительно ω имеет вид

$$\omega^4 - \frac{c_1 J + c_3 m}{Jm} \omega^2 + \frac{c_1 c_3 - c_2^2}{Jm} = 0.$$

Нахождение корней данного уравнения в общем виде затруднено, поэтому зададимся численными значениями параметров системы: $k_1 = 2 \cdot 10^5$ Н/м; $k_2 = 2,5 \cdot 10^5$ Н/м; $l_1 = 1$ м; $l_2 = 1,5$ м; $m = 1,5 \cdot 10^3$ кг; $J = 300$ кг·м².

В результате численного решения уравнения получаем: $\omega_1^2 = 270$, $\omega_2^2 = 2572$, следовательно, частоты главных колебаний

$$\omega_1 = 16,4 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_2 = 50,7 \text{ с}^{-1}.$$

Определим значения коэффициента γ , соответствующие каждому из главных колебаний:

$$\gamma_1 = \frac{c_2}{m\omega_1^2 - c_1} = 3,9 \text{ м/рад} = 6,8 \text{ см/град},$$

$$\gamma_2 = \frac{c_2}{m\omega_2^2 - c_1} = -0,05 \text{ м/рад} = -0,09 \text{ см/град}.$$

Таким образом, если в первом главном колебании центр масс опустится на 6,8 см, то корпус автомобиля повернется одновременно против хода часовой стрелки на один градус. Во втором главном колебании при опускании центра масс на 0,09 см корпус повернется по ходу часовой стрелки на один градус. Формы главных колебаний показаны на рис. 10.12.



Рис. 10.12

Уравнения колебания корпуса автомобиля (общее решение системы дифференциальных уравнений (10.12)) будут иметь вид:

$$x = \gamma_1 B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \gamma_2 B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

$$\alpha = B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Неизвестные постоянные B_1 , B_2 и φ_1 , φ_2 определяют исходя из начальных условий.

10.3. Биения в связанной системе

Биения – колебания с периодически изменяющейся амплитудой, возникающие при наложении гармонических колебаний с близкими частотами.

Если параметры колебательной системы подобраны так, что связь между маятниками является слабой, то есть значения собственных частот мало отличаются друг от друга, то есть $\omega_2 \approx \omega_1$ и $\Delta\omega = (\omega_2 - \omega_1) \ll \omega_1$, то в

системе возникают биения. Условие слабой связи для связанных маятников с учетом формул (10.10):

$$\frac{kb^2}{ml^2} \ll \frac{g}{l}.$$

Биения возникают при любых начальных условиях, но наиболее наглядно биения выражены в случае $A_1 = A_2 = A_0$ и $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

Согласно данным начальным условиям, если один из маятников отклонить от положения равновесия, а другой придержать в положении равновесия, то после предоставления системы самой себе под действием упругой пружины изначально покоящийся маятник все в большей степени будет вовлекаться в колебательный процесс. Причем при уменьшении амплитуды одного из маятников амплитуда второго увеличивается. В то время, когда амплитуда одного из маятников будет максимальной, амплитуда другого маятника станет равной нулю. Поскольку общая энергия связанных маятников остается постоянной, то будет происходить последовательная перекачка энергии от одного маятника к другому.

После подстановки начальных условий в систему уравнений (10.11) и математических преобразований уравнения биений обоих маятников примут вид:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2A_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right) \approx 2A_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos(\omega_1 t), \\ \alpha_2 &= 2A_0 \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right) \approx 2A_0 \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \sin(\omega_1 t), \end{aligned} \quad (10.15)$$

где амплитуды биений зависят от времени:

$$A_{\delta 1} = 2A_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right), \quad A_{\delta 2} = 2A_0 \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right).$$

Графики колебаний обоих маятников $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$, описываемых уравнениями (10.15), изображены на рис. 10.13.

Период колебаний маятников при биениях

$$T = \frac{2\pi}{\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)} \approx \frac{2\pi}{\omega_1}.$$

Период биений – это период изменения амплитуды – наименьший промежуток времени между моментами времени, когда амплитуда обращается в нуль (или промежуток времени между двумя соседними амплитудами биений) (рис. 10.13):

$$\tau_{\text{б}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1},$$

где $\Delta\omega$ – частота биений; ω_1 и ω_2 – собственные (нормальные) частоты синфазных и антифазных колебаний соответственно. Период биения не зависит от начальных условий, то есть от способа возбуждения колебаний, поэтому для одной и той же колебательной системы остается величиной постоянной.

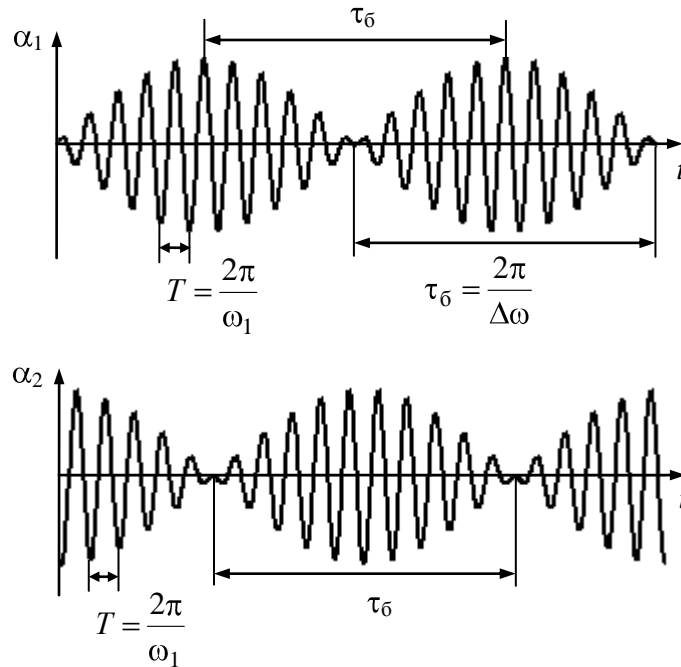


Рис. 10.13

10.4. Затухающие колебания в связанных системах

Действие сил трения в системе с двумя степенями свободы в общем приводит к тем же результатам, что и в системах с одной степенью свободы. То есть сопротивление слабо влияет на частоту и период и сильно на уменьшение амплитуды. Колебания даже при малом коэффициенте сопротивления достаточно быстро затухают.

10.5. Вынужденные колебания в связанных системах

Вынужденные колебания возникают, если колебательная система подвержена внешнему периодическому воздействию.

Рассмотрим систему связанных маятников. Пусть, например, на первый из маятников действует периодический момент сил – вынуждающий момент, изменяющийся по гармоническому закону:

$$M_1 = M_0 \cos \Omega t,$$

где M_0 и Ω – амплитуда и циклическая частота вынуждающего момента. Трением пренебрегаем.

Дифференциальные уравнения движения (10.9) приобретут вид:

$$\ddot{\alpha}_1 + \left(\frac{g}{l} + \frac{kb^2}{ml^2} \right) \alpha_1 - \frac{kb^2}{ml^2} \alpha_2 = \frac{M_0}{ml^2} \cos(\Omega t),$$

$$\ddot{\alpha}_2 + \left(\frac{g}{l} + \frac{kb^2}{ml^2} \right) \alpha_2 - \frac{kb^2}{ml^2} \alpha_1 = 0.$$

Общее решение системы уравнений для установившихся колебаний имеет вид:

$$\alpha_1 = \alpha_{m1} \cos(\Omega t - \psi_1),$$

$$\alpha_2 = \alpha_{m2} \cos(\Omega t - \psi_2),$$

где α_{m1} , α_{m2} – амплитуды вынужденных колебаний маятников; ψ_1 , ψ_2 – сдвиг фаз между вынуждающим моментом и колебаниями маятников; Ω – частота вынужденных колебаний маятников.

Проанализируем вынужденные колебания в связанной системе.

1. Оба маятника связанной системы совершают вынужденные гармонические колебания с частотой Ω , равной частоте вынуждающего момента. Это утверждение получено и справедливо для рассматриваемой колебательной системы – линейной системы при гармоническом возбуждении.

2. Амплитуды вынужденных колебаний:

$$\alpha_{m1} = \left(\frac{M_0}{ml^2} \right) \frac{\omega_2^2 - \Omega^2}{(\omega_1^2 - \Omega^2)(\omega_2^2 - \Omega^2) - \left(\frac{kb^2}{ml^2} \right)^2},$$

$$\alpha_{m2} = \left(\frac{M_0}{ml^2} \right) \left(\frac{kb^2}{ml^2} \right) \frac{1}{(\omega_1^2 - \Omega^2)(\omega_2^2 - \Omega^2) - \left(\frac{kb^2}{ml^2} \right)^2}.$$

Из этих уравнений видно, что амплитуды колебаний обоих маятников зависят не только от амплитуды вынуждающего момента M_0 , но и от частоты внешнего воздействия Ω .

3. При частоте вынуждающего момента, близкой к одной из собственных частот ($\Omega \approx \omega_1$ или $\Omega \approx \omega_2$), значение амплитуды колебаний резко возрастает. Это явление носит название *резонанса*. АЧХ маятников представлена на рис. 10.14.

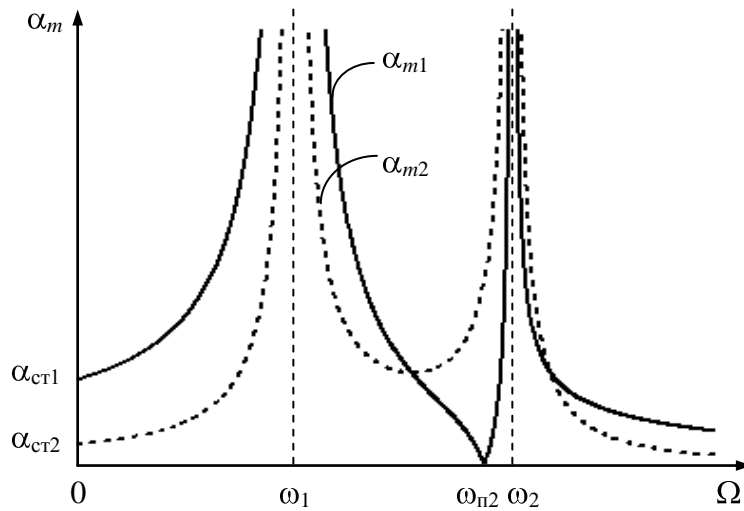


Рис. 10.14

Для первого маятника резонансная кривая будет иметь два максимума на частотах ω_1 и ω_2 (см. рис. 10.14, сплошная линия). Два максимума на резонансной кривой будут наблюдаться и для второго маятника, который соединен упругой связью с первым маятником (рис. 10.14, пунктир).

Максимум на резонансных кривых при частоте ω_1 соответствует синфазным колебаниям, при частоте ω_2 – антифазным колебаниям.

4. При частоте вынуждающего момента, равной парциальной частоте одного маятника, значение амплитуды колебаний второго маятника стремится к нулю. Это явление носит название *антирезонанса*.

При малом затухании амплитуда первого маятника (того, на который действовал вынуждающий момент) стремится к нулю на парциальной частоте второго маятника (см. рис. 10.14, $\alpha_{m1} \rightarrow 0$ при $\Omega \rightarrow \omega_{п2}$), то есть наблюдается подавление колебаний 1-го маятника на парциальной частоте 2-го маятника. Такое подавление вызвано компенсацией момента вынуждающей силы моментом силы, действующей со стороны 2-го маятника.

Рассмотрим частный случай антирезонанса – динамическое гашение колебаний. Динамическим гасителем называют дополнительную массу m_2 , присоединяемую к основной массе m_1 посредством упругого элемента с целью уменьшения амплитуды вынужденных колебаний основной массы (рис. 10.15а).

В крутильной колебательной системе (рис. 10.15б) роль динамического гасителя выполняет подсистема, состоящая из диска с моментом инерции J_2 и вала с коэффициентом крутильной жесткости k_2 .

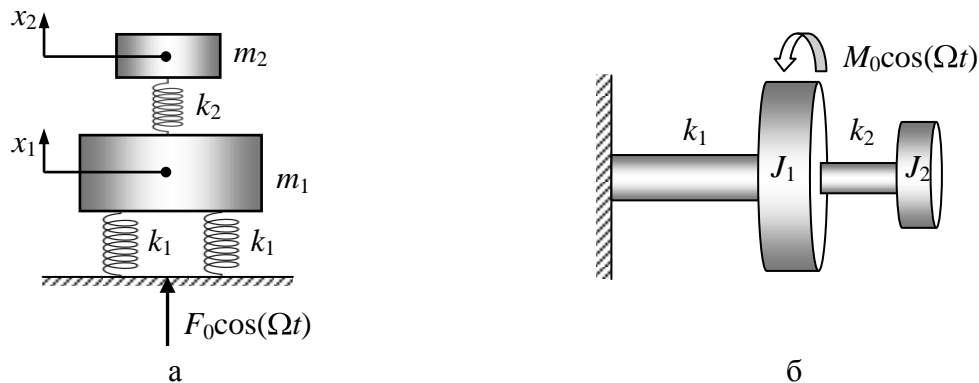


Рис. 10.15

Физическая сущность динамического гашения состоит в том, чтобы действующая сила со стороны гасителя на основную массу была равна по величине вынуждающей силе, но противоположна ей по направлению. Динамическое гашение применимо для всех видов колебаний (продольных, крутильных, изгибных и т.д.), при этом вид колебаний, осуществляемых присоединенным устройством, как правило, аналогичен виду подавляемых колебаний.

Модель динамического гасителя колебаний в вертикальной плоскости показана на рис. 10.15а, где m_2 – масса гасителя; k_2 – коэффициент жесткости гасителя. Данная система имеет две степени свободы.

Параметры гасителя m_2 и k_2 выбираются так, чтобы действующая сила со стороны гасителя через пружину k_2 была равна возмущающей силе и противоположна ей по направлению.

На рис. 10.16 приведены АЧХ при отсутствии динамического гасителя (кривая 1) и при его установке (кривая 2).

Расчетный режим, при котором амплитуда $\alpha_{m_1} = 0$, отвечает частоте $\omega_{п2}$. Если значение $\omega_{п2}$ не строго постоянно, а изменяется на некотором частотном диапазоне, возможно существенное увеличение амплитуды в окрестности резонансных частот ω_1 и ω_2 . В подобных случаях между динамическим гасителем и основной массой дополнительно устанавливают специальное устройство – демпфер, в котором возникает сила сопротивления, обеспечивающая отток энергии колебаний. АЧХ при этом имеет вид кривой 3. На частотном диапазоне $\Delta\omega$, показанном на рис. 10.16 штрихов-

кой, установка демпфера привела к увеличению амплитуды вынужденных колебаний, так как теперь фаза колебаний гасителя не строго противоположна фазе вынуждающей силы. Этот эффект интересен тем, что далеко не всегда введение силы сопротивления приводит к уменьшению амплитуд колебаний.

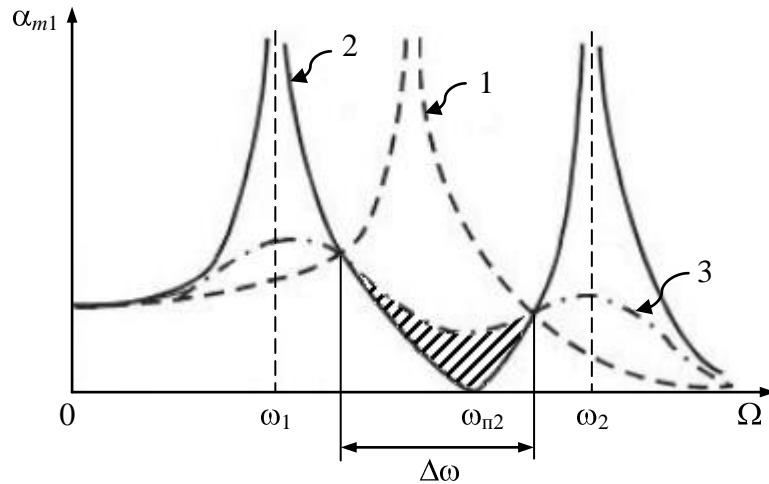


Рис. 10.16

Устройства, основанные на описанном принципе динамического гашения колебаний, используются в различных инженерных сооружениях, работающих в условиях периодических динамических нагрузений. В частности, в знаменитом небоскребе «Тайбэй 101» (Тайвань, 101 этаж, высота более 500 м) установлен виброгаситель в виде 660-тонного маятника, подвешенного на 92-м этаже для уменьшения горизонтальных колебаний основной конструкции при землетрясениях и ураганах.

Вопросы для самоконтроля

1. Что понимается под сложением колебаний?
2. Что называют фигурами Лиссажу?
3. Какими параметрами складываемых колебаний определяется вид фигуры Лиссажу?
4. Как по фигуре Лиссажу определить отношение частот составляющих колебаний?
5. Какая колебательная система называется связанной системой?
6. Сколько степеней свободы имеет система связанных маятников?
7. Приведите вывод системы дифференциальных уравнений, описывающей малые колебания консервативной системы двух связанных маятников.
8. Запишите уравнения колебаний маятников связанной системы без трения.
9. Какое движение совершает каждый маятник связанной системы? Почему движение каждого из двух связанных маятников не является гармоническим колебанием?
10. Какие колебания называются синфазными? При каких начальных условиях возбуждаются синфазные колебания?
11. Выведите уравнения синфазных колебаний маятников.

12. Чему равна частота синфазных колебаний? От чего она зависит?
13. Какие колебания называются антифазными? При каких начальных условиях возбуждаются антифазные колебания?
14. Выведите уравнения антифазных колебаний маятников.
15. Чему равна частота антифазных колебаний? От чего она зависит?
16. Какие колебания называются нормальными? Что называется нормальными частотами?
17. Какие колебания называются парциальными? Что называется парциальной частотой?
18. Что называется биениями? При каких условиях возникают биения?
19. Выведите уравнение биений в связанной системе.
20. Изобразите биения графически.
21. Чему равен период биений? От чего он зависит?
22. Зависит ли период биения от способа вывода маятниковой системы из положения равновесия?
23. Какая связь между маятниками называется слабой связью? Каковы условия применимости приближения слабой связи?
24. Как изменится период биений при увеличении расстояния от оси подвеса до пружины, соединяющей маятники?
25. Как изменится период биений при увеличении массы грузов, закрепленных на маятниках?
26. С какой частотой происходит передача энергии от одного маятника к другому?
27. Что называется резонансом?
28. Каковы особенности вынужденных колебаний в связанной колебательной системе?
29. С чем связана возможность возникновения биений в процессе установления вынужденных колебаний?
30. Какой вид имеет резонансная кривая системы двух связанных маятников?
31. Сколько резонансных частот имеет связанная колебательная система с двумя степенями свободы?
32. Приведите примеры вредного проявления резонанса. Какими способами можно предотвратить резонанс?
33. Что называется антирезонансом?
34. В чем сущность динамического гашения?

ГЛАВА 11. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

До сих пор мы рассматривали колебания системы, которые описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. С физической точки зрения это означает, что массы постоянны, восстанавливающие силы пропорциональны соответствующим отклонениям от положения равновесия и силы сопротивления (демпфирования) пропорциональны скорости.

Колебательную систему будем называть *нелинейной*, если уравнение движения этой системы содержит нелинейные функции координаты и/или скорости.

В реальных технических системах характеристики демпферов и упругих элементов являются нелинейными. Несмотря на это, значительную часть расчетов на практике проводят на основе линейной теории колебаний и при этом получают удовлетворительные результаты. Однако существуют явления, которые не могут быть объяснены с позиции линейной теории колебаний. В таких системах движение описывается нелинейными дифференциальными уравнениями. Так как решение нелинейных дифференциальных уравнений – процедура сложная, то применяют приближенные, численные и графические методы.

В теории колебаний различают нелинейные колебания:

квазилинейные (близкие к линейным);

существенно нелинейные, например в которых собственная частота ω_0 зависит от амплитуды колебаний A или частота вынужденных колебаний $\omega_{\text{вын}}$ не равна частоте внешней возмущающей силы Ω .

Классификация нелинейных колебаний приведена на рис. 11.1.

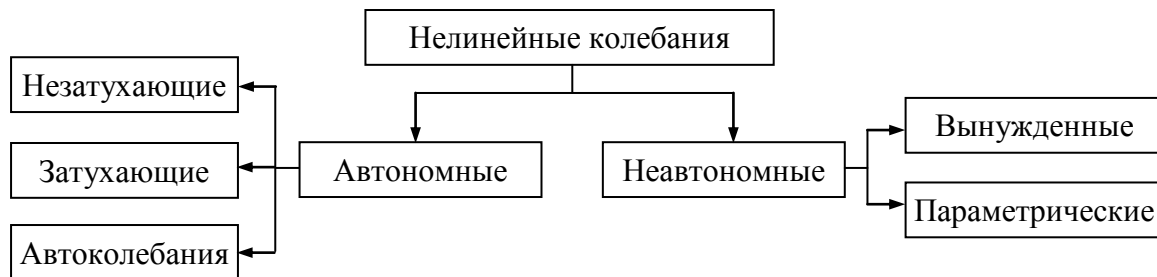


Рис. 11.1

Основными причинами возникновения нелинейных колебаний являются:

нелинейность восстанавливающей (квазиупругой) силы;

нелинейность силы сопротивления (нелинейный демпфер).

Вследствие возникающих при решении нелинейных задач значительных сложностей ограничимся рассмотрением колебательных систем с одной степенью свободы без приведения математических выкладок.

11.1. Свободные незатухающие колебания в нелинейных системах

Используем понятие *приведенная силовая характеристика* $f = \frac{F}{m}$,

где F – восстанавливающая сила; m – масса тела (или $f = \frac{M}{J}$, где M – восстанавливающий момент сил; J – момент инерции тела).

Силовую характеристику, имеющую отрицательную вторую производную силы по координате, называют *мягкой* (рис. 11.2а).

Силовую характеристику, имеющую положительную вторую производную силы по координате, называют *жесткой* (рис. 11.2б).

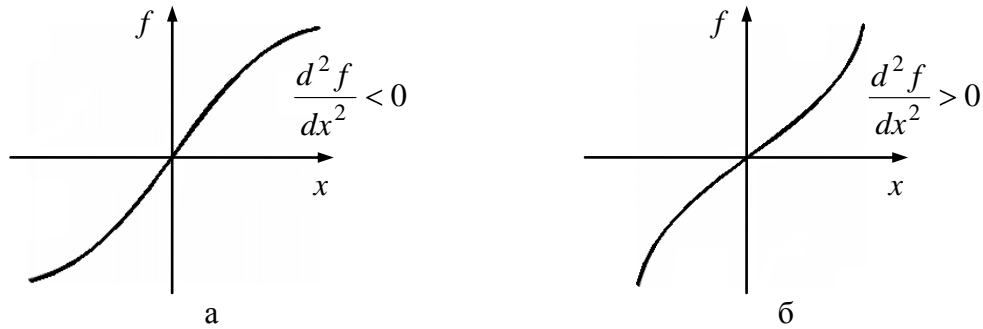


Рис. 11.2

Колебательными системами с мягкой силовой характеристикой являются, например, математический маятник при больших углах отклонения; качка корабля (рис. 11.3).



Рис. 11.3

К колебательным системам с жесткой силовой характеристикой можно отнести упругую пластину, закрепленную в криволинейные жесткие направляющие; коническую пружину; вертикальный пружинный маятник, совершающий колебания вдоль горизонтальной оси (рис. 11.4).

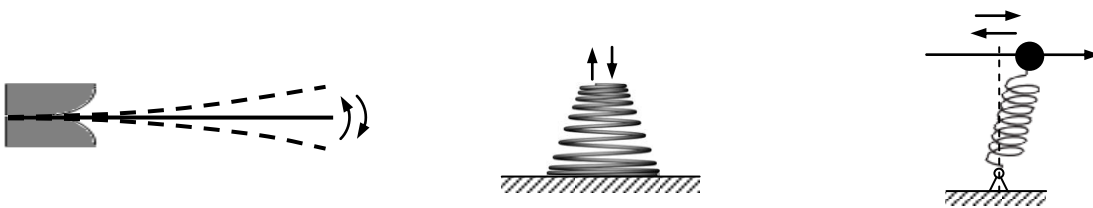


Рис. 11.4

Свободные колебания в нелинейных системах являются периодическими, но негармоническими и неизохронными. Колебания называют *неизохронными*, если частота колебаний зависит от начальных условий, например амплитуды, а не только от собственных характеристик системы.

Пример 1. Рассмотрим колебательную систему с мягкой характеристикой – математический маятник в виде жесткого невесомого стержня длиной l с закрепленной на конце материальной точкой массой m при больших углах отклонения α (рис. 11.5).

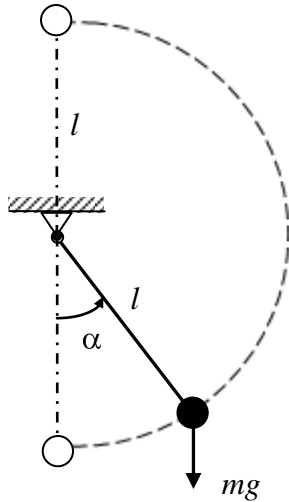


Рис. 11.5

Запишем дифференциальное уравнение вращательного движения:

$$J\ddot{\alpha} = M, \quad ml^2\ddot{\alpha} = -mgl \sin \alpha,$$

где $J = ml^2$ – момент инерции материальной точки относительно оси подвеса; $\ddot{\alpha}$ – угловое ускорение (вторая производная от угла по времени); $M = -mgl \sin \alpha$ – момент силы тяжести; $l \sin \alpha$ – плечо силы тяжести.

При больших углах отклонения α приведенная силовая характеристика нелинейная $f = \frac{M}{J} = \frac{g}{l} \sin \alpha$, то есть $f \sim \sin \alpha$. После

преобразования дифференциальное уравнение примет вид

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \sin \alpha = 0. \quad (11.1)$$

Решив это уравнение, можно найти период собственных незатухающих колебаний в виде эллиптического интеграла

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\alpha_m} \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\alpha_m}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}},$$

или в виде степенного ряда

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha_m}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha_m}{2} + \dots \right], \quad (11.2)$$

где α_m – амплитуда колебаний. Формула (11.2) получена в результате применения метода последовательных приближений с разложением нелинейной функции $\sin \alpha$ в формуле (11.1) в степенной ряд.

Опыт исследований нелинейных осцилляторов показывает, что во многих случаях в решении уравнений, описывающих их движение, достаточно ограничиться 1-м членом разложения в ряд (более высокого порядка), а членами 2-го и другого порядка малости пренебречь. Такое упрощение практических задач в технике часто оправдано.

Из уравнения (11.2) видно, что период и частота ($\omega_0 = 2\pi/T_0$) зависят не только от длины маятника l , но и от амплитуды колебаний α_m . Графики мягкой силовой характеристики и зависимости амплитуды α_m от частоты ω_0 приведены на рис. 11.6а и 11.6б соответственно.

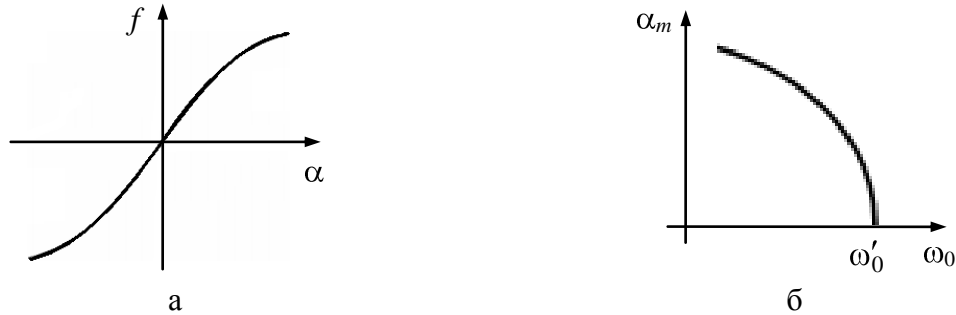


Рис. 11.6

В результате линеаризации дифференциального уравнения (угол отклонения α мал, $\sin\alpha = \alpha$) формула (11.2) справедлива для периода T'_0 и частоты ω'_0 линейных колебаний маятника:

$$T'_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \omega'_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Нелинейное уравнение (11.1) не имеет точного аналитического решения, однако многие закономерности таких колебаний можно проанализировать с использованием фазового портрета на плоскости $(\alpha, \dot{\alpha})$. Для консервативной системы уравнения фазовых траекторий непосредственно следуют из закона сохранения энергии: полная энергия маятника остается постоянной во время движения. Следовательно, полная энергия маятника E_0 в начальный момент времени равна сумме его кинетической $\frac{J\dot{\alpha}^2}{2}$ и потенциальной $mgl(1 - \cos\alpha)$ энергий в любой момент времени движения:

$$\frac{J\dot{\alpha}^2}{2} + mgl(1 - \cos\alpha) = E_0. \quad (11.3)$$

Это уравнение связывает между собой угол отклонения α и угловую скорость $\dot{\alpha}$, поэтому представляет собой уравнение фазовой траектории, соответствующей определенному значению полной энергии маятника E_0 . Фазовый портрет нелинейных колебаний математического маятника в соответствии с выражением (11.3) изображен на рис. 11.7.

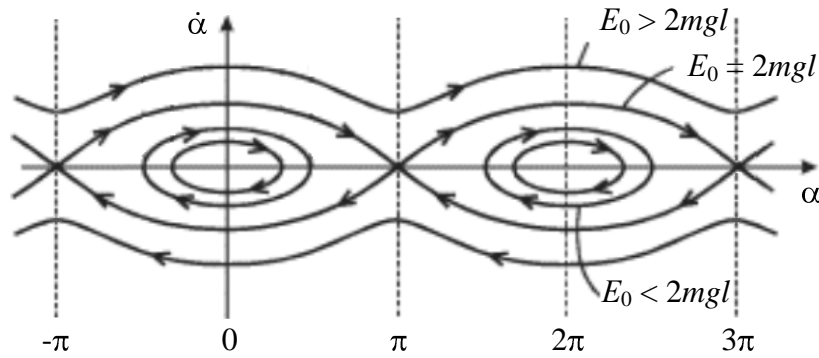


Рис. 11.7

Состояния равновесия нелинейного маятника на фазовой плоскости расположены вдоль оси α (скорость $\dot{\alpha} = 0$). Положению устойчивого равновесия ($\alpha = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$) соответствуют особые точки – центры, положению неустойчивого равновесия ($\alpha = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$) – седла. Следует отметить, что углы, отличающиеся на 2π , эквивалентны, так как соответствуют одному и тому же положению маятника. Для наглядности будем рассматривать фазовую плоскость, выходя за границы интервала $-\pi \leq \alpha \leq \pi$.

Из анализа фазового портрета видны два типа фазовых траекторий (замкнутые и незамкнутые), соответствующие двум типам движения. Замкнутым траекториям вблизи центров соответствуют незатухающие колебания возле нижнего положения равновесия. Такие колебания имеют место, если полная энергия маятника меньше максимально возможного значения потенциальной энергии: $E_0 < 2mgl$. При этом если $E_0 \ll 2mgl$, то колебания будут гармоническими, а фазовые траектории – эллипсами. Если $E_0 \sim 2mgl$, то колебания – негармонические, форма траектории сильно отличается от эллиптической.

Незамкнутым, так называемым «убегающим», траекториям соответствует вращение маятника с полной энергией $E_0 > 2mgl$. В фазовой плоскости вращение маятника представлено траекторией, которая выходит за пределы вертикальных линий $\alpha = \pm\pi$, продолжаясь периодически с каждым новым оборотом (см. рис. 11.7).

Замкнутые и незамкнутые траектории разделяют *сепаратрисы* – траектории, проходящие через седла. В рассматриваемом случае сепаратрисе соответствует энергия $E_0 = 2mgl$.

Пример 2. Рассмотрим колебания осциллятора с жесткой силовой характеристикой. На горизонтальный стержень насажен просверленный по диаметру шар массы m , прикрепленный к пружине длиной l_0 и жесткостью k (рис. 11.8). В положении равновесия пружина не деформирована.

Запишем дифференциальное уравнение движения маятника:

$$m\ddot{x} = -\frac{k}{2l_0^2} x^3,$$

где нелинейная восстанавливающая сила $F = k\Delta l \sin \alpha \approx \frac{k}{2l_0^2} x^3$; Δl – удлинение пружины.

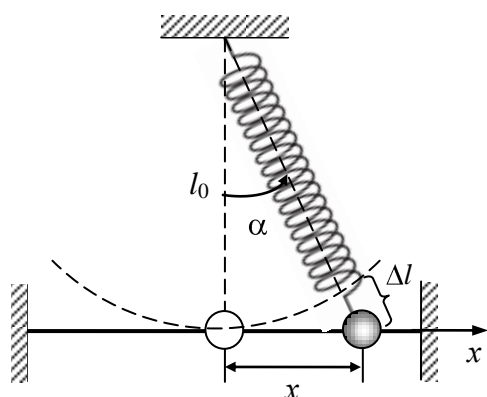


Рис. 11.8

Приведем дифференциальное уравнение к стандартному виду:

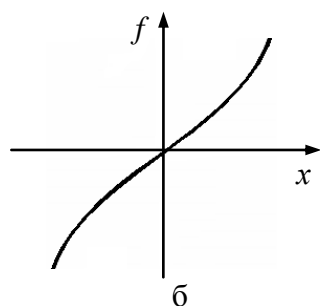
$$\ddot{x} + \frac{k}{2ml_0^2} x^3 = 0.$$

В результате решения этого уравнения получено выражение для периода собственных незатухающих колебаний:

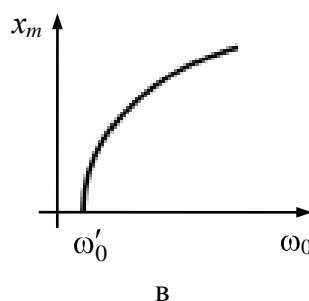
$$T_0 = 2\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)} \frac{l_0}{x_m} \sqrt{\frac{m}{k}} \approx 10,5 \frac{l_0}{x_m} \sqrt{\frac{m}{k}},$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция; x_m – амплитуда колебаний.

Из формулы видно, что период и частота ($\omega_0 = 2\pi/T_0$) зависят не только от параметров маятника m , k , l_0 , но и от амплитуды колебаний x_m . Графики жесткой силовой характеристики и зависимости амплитуды x_m от частоты ω_0 приведены на рис. 11.9а и 11.9б соответственно.



б



в

Рис. 11.9

Пример 3. В технике часто встречаются системы с *кусочно-нелинейными* характеристиками. Например, это системы с зазором (рис. 11.10) или натягом (рис. 11.11). На рисунках системы изображены с соответствующими им силовыми характеристиками и зависимостями амплитуды A от частоты ω_0 .

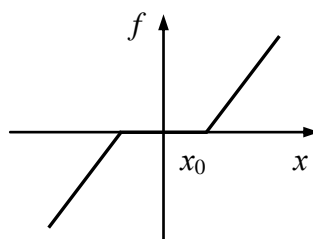
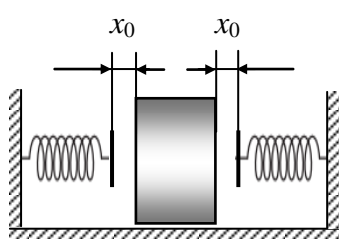
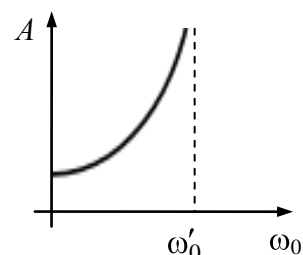


Рис. 11.10



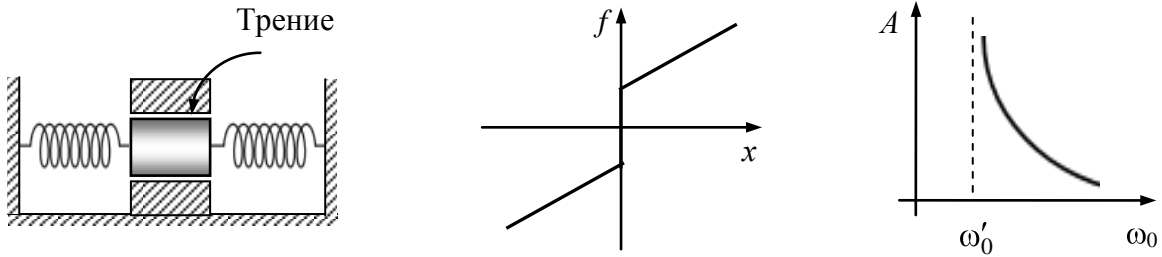


Рис. 11.11

11.2. Свободные колебания в диссипативных системах с нелинейным демпфированием

Еще одной причиной нелинейности колебаний может быть нелинейность силы трения (сопротивления).

При движении тела в жидкой или газообразной среде на него действует сила сопротивления (вязкого трения). При малых скоростях эта сила пропорциональна скорости: $F_{\text{тр}} \sim \dot{x}$ (линейная зависимость). При увеличении скорости движения тела физика процесса изменяется. Кинетическая энергия тела начинает расходоваться не только на трение между слоями жидкости, но и на перемещение объема жидкости впереди тела. В этом случае сила сопротивления становится пропорциональной квадрату скорости: $F_{\text{тр}} \sim \dot{x}^2$, то есть возникает нелинейный режим движения.

Другой пример – затухающие колебания с внешним трением.

В табл. 11 проведено сравнение результатов исследования линейных и нелинейных колебаний пружинного маятника.

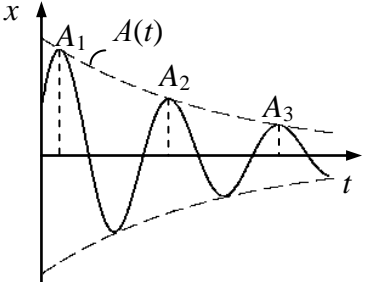
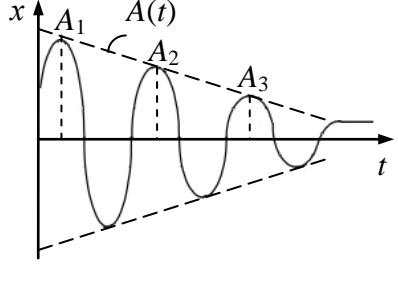
Колебания происходят в различных условиях, но при одинаковых начальных условиях: при $t = 0$ начальная координата $x(0) = x_0$, начальная скорость $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$. В одном случае тело совершает колебания в вязкой среде при малых скоростях, в другом – при внешнем трении.

На основе вышеизложенного отметим, что линейное затухание колебаний влияет на период T_1 , приводя к его возрастанию по сравнению с периодом собственных колебаний. Постоянная по величине сила трения не влияет на частоту и период колебаний по сравнению с собственными частотой и периодом.

В общем случае уравнение затухающих колебаний можно представить в виде $x = A(t) \cos(\omega t)$, где зависимость амплитуды от времени $A(t)$ – огибающая графика колебаний.

В случае линейной зависимости $F_{\text{тр}} \sim \dot{x}$ амплитуда убывает в геометрической прогрессии (по экспоненте). В случае $F_{\text{тр}} = \text{const}$ амплитуда убывает в арифметической прогрессии (по прямой) и колебания прекращаются через конечное число циклов в результате остановки тела в области «мертвой» зоны.

Таблица 11

Вид колебаний	Линейные колебания	Нелинейные колебания
Сила трения	Вязкое трение, $F_{\text{тр}} = -b\dot{x}$, $F_{\text{тр}} \sim \dot{x}$	Внешнее трение, $F_{\text{тр}} = \mu N$, $F_{\text{тр}} = \text{const}$
Дифференциальное уравнение движения	$m\ddot{x} + kx + b\dot{x} = 0$, линейное уравнение	$m\ddot{x} + kx = \pm F_{\text{тр}}$, нелинейное уравнение
Уравнение движения	$x = A(t) \cos(\omega_1 t + \varphi_0)$	$x = \pm \frac{F_{\text{тр}}}{k} + A(t) \cos(\omega t + \varphi_0)$
Частота и период	$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ $T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$	$\omega = \omega_0$ $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$
Амплитуда	$A = A_0 e^{-\beta t}$, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \frac{A_3}{A_4} = \dots$	$\Delta A = \frac{4F_{\text{тр}}}{k}$, $A_2 = A_1 - \Delta A$, $A_3 = A_1 - 2\Delta A$ и т.д.
Графики $A(t)$		

11.3. Особенности вынужденных колебаний в нелинейных системах

Вынужденные колебания возбуждаются и поддерживаются внешней возмущающей силой, не зависящей от характеристик системы.

Рассмотрим консервативную колебательную систему с гармоническим внешним возбуждением. Запишем дифференциальное уравнение, вытекающее из второго закона Ньютона:

$$m\ddot{x} + F(x) = F_0 \cos(\Omega t),$$

где m – масса колеблющегося тела; $F(x)$ – квазиупругая характеристика, определяющая зависимость возвращающей силы от смещения; F_0 и Ω – амплитуда и частота внешнего возмущения.

При симметричной квазиупругой характеристике уравнение колебаний приближенно имеет вид

$$x = A_1 \cos(\Omega t),$$

где A_1 – амплитуда колебаний; Ω – основная частота колебаний, то есть колебания происходят с основной частотой, равной частоте внешней силы.

Рассмотрим консервативную колебательную систему при кубической симметричной квазиупругой характеристике вида

$$F(x) = kx + cx^3,$$

где k и c – постоянные величины.

Дифференциальное уравнение в этом случае

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{c}{m}x^3 = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t),$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma x^3 = f_0 \cos(\Omega t)$$

имеет приближенное решение

$$x = A \cos(\Omega t) + \frac{\gamma A^3}{32\omega_0^2} [\cos(\Omega t) - \cos(3\Omega t)].$$

Данное решение кроме гармоник с основной частотой Ω содержит гармонику с тройной частотой 3Ω , то есть колебания *периодические, но негармонические*.

Амплитуда определяется из кубического уравнения

$$(\Omega^2 - \omega_0^2)A - \frac{3}{4}\gamma A^3 + f_0 = 0.$$

Это уравнение при малых частотах содержит один корень, при больших – три корня.

Многозначность решения означает, что одной частоте могут соответствовать колебания с разными амплитудами.

В данном примере одному значению частоты Ω могут соответствовать три разные формы с разной амплитудой колебания.

Аналогичная неоднозначность существует и для сдвига фаз между внешней силой и вынужденными колебаниями.

График зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты (АЧХ) для линейного осциллятора показан на рис. 11.12а, АЧХ для нелинейного осциллятора – на рис. 11.12б.

По виду АЧХ можно отметить *особенности вынужденных колебаний в нелинейной системе* (рис. 11.12б).

1. Резонанс сдвинут от собственной частоты ω_0 : в область более высоких частот – для жесткой квазиупругой характеристики; в область низких частот – для мягкой квазиупругой характеристики.

2. При больших частотах одной и той же частоте могут соответствовать три разных режима колебаний с тремя различными амплитудами. Например, частоте Ω' соответствует A_1, A_2, A_3 .

3. Участок CD кривой соответствует неустойчивым колебаниям системы: любое сколь угодно слабое воздействие на систему, находящуюся в таком состоянии, привело бы к переходу к колебательному режиму, соответствующему участкам BC или DE .

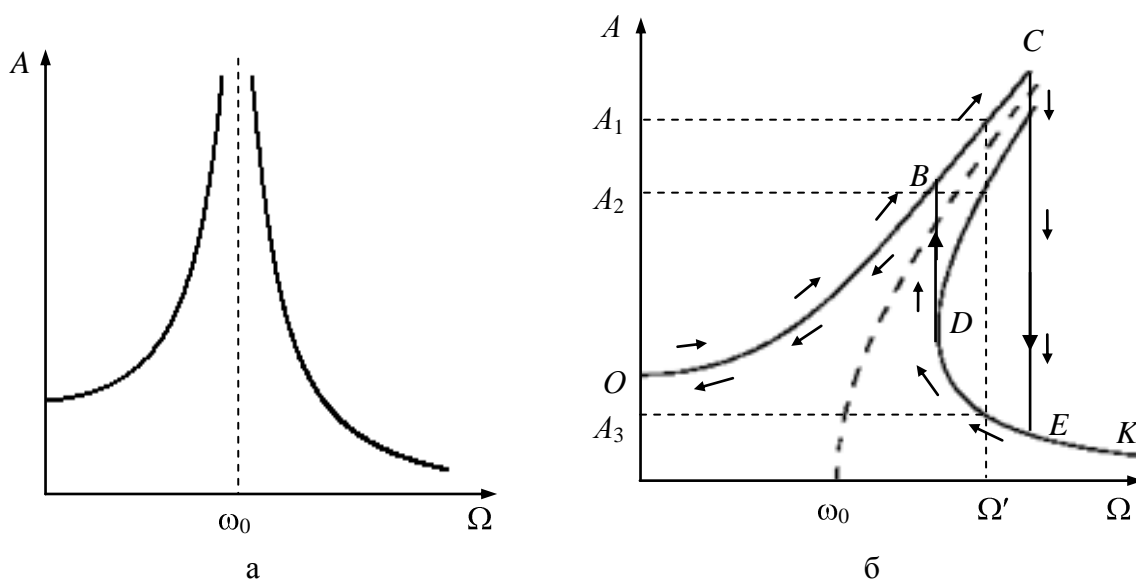


Рис. 11.12

Так, при постепенном увеличении частоты Ω амплитуда будет возрастать, следуя кривой OBC . Но если начинается или случайно происходит уменьшение частоты, то происходит «срыв» амплитуды на нижнюю ветвь графика: от значения, соответствующего точке C , до значения, отвечающего точке E , и при дальнейшем увеличении частоты будет меняться вдоль кривой EK .

Если теперь уменьшать частоту, то амплитуда вынужденных колебаний будет меняться вдоль кривой KD . В точке перегиба D происходит «срыв» амплитуды на верхнюю ветвь. Амплитуда резко возрастет до значения, соответствующего точке B , и затем будет уменьшаться вдоль кривой BO .

Если имеются силы сопротивления, то обе ветви АЧХ смыкаются. В этом случае неизбежны срывы амплитуды при значениях, отвечающих точкам перегиба C и D . АЧХ для осциллятора с жесткой квазиупругой характеристикой показана на рис. 11.13а, с мягкой – на рис. 11.13б.

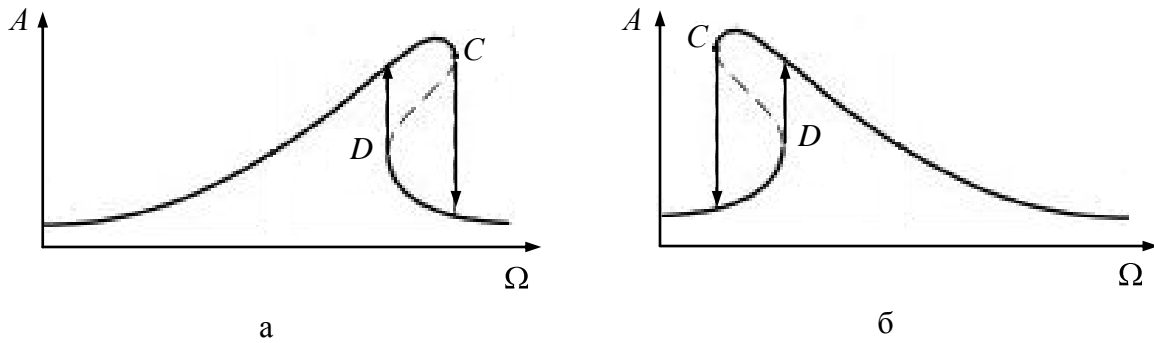


Рис. 11.13

4. Кроме колебаний с основной частотой Ω , равной частоте внешней силы:

появляются *супергармонические колебания* с частотами, кратными Ω , то есть с частотами $2\Omega, 3\Omega, \dots$ и т.д. (в целое число раз больше основной частоты Ω);

могут возникать *субгармонические колебания* – колебания с частотой в целое число раз меньше основной частоты Ω , то есть с частотами $\frac{\Omega}{2}, \frac{\Omega}{3}, \dots$ и т.д. В результате возможно появление колебаний с большой амплитудой на частоте, в целое число раз меньшей, чем частота внешней силы – *субгармонический резонанс*.

5. При действии полигармонической силы типа $F_1 \cos(\Omega_1 t) + F_2 \cos(\Omega_2 t)$ кроме колебаний с частотами Ω_1 и Ω_2 в колебательной системе возникают колебания с комбинационными частотами $(\Omega_1 + \Omega_2)$ и $(\Omega_1 - \Omega_2)$. Наибольшее значение имеют низкочастотные комбинационные колебания.

11.4. Автоколебания

Автоколебания – это устойчивые периодические движения неконсервативной нелинейной системы, источник энергии которых не обладает колебательными свойствами, а поступление энергии регулируется самой системой.

В автоколебательной системе расход энергии на преодоление сил сопротивления компенсируется за счет энергии, поступающей от постоянного источника энергии, и задается регулятором, входящим в состав колебательной системы.

В качестве примеров автоколебательных систем можно привести колебания веток деревьев под действием ветра; голос – колебания голосовых связок; струнно-смычковые инструменты; духовые инструменты; вибрации водопроводного крана; флаттер-ветровой резон (вибрация частей самолета); скрип тормозов; механические часы; отбойный молоток; поршни ДВС и т.д.

Амплитуда и частота автоколебаний зависят от свойств самой системы.

Отличия автоколебаний от свободных колебаний:

амплитуда не зависит от начальных условий;

колебания не затухают, несмотря на наличие сил сопротивления, и представляют собой устойчивые колебания с установившейся амплитудой.

Автоколебания от вынужденных колебаний отличаются тем, что их частота не равна частоте внешней силы (внешнее воздействие в данном случае неперiodическое).

Различают автоколебания *осцилляторного типа* и автоколебания *накопительного типа*. Строгой границы между двумя типами нет, одна и та же автоколебательная система при малом рассеянии энергии может быть системой осцилляторного типа, а при большом рассеянии энергии – накопительной.

Автоколебания осцилляторного типа. Автоколебания осцилляторного типа близки к гармоническим колебаниям с частотой ω_0 .

Схема автоколебаний осцилляторного типа приведена на рис. 11.14. Регулирующее устройство управляет осциллятором и осуществляет подачу энергии к нему, тем самым реализуется обратная связь от осциллятора через регулятор к источнику энергии.

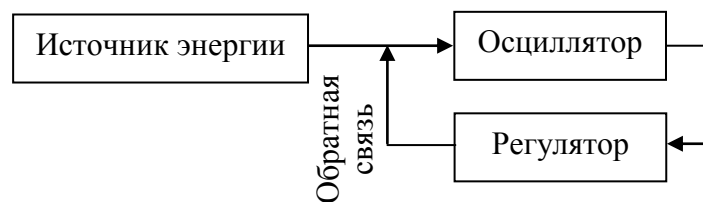


Рис. 11.14

Пример 1. Примером автоколебательной системы осцилляторного типа является маятник Фруда. Маятник представляет собой физический маятник, свободно насаженный на гладкий вал с помощью кольцевой муфты (рис. 11.15, где v – относительная скорость трущихся поверхностей вала и муфты; v_m – скорость точек поверхности муфты; v_b – скорость точек поверхности вала). Если вал не вращается, то маятник может совершать затухающие колебания.

Пусть вал вращается с постоянной угловой скоростью Ω против часовой стрелки. Угловая скорость скольжения вала относительно маятника

$$\omega_b = \Omega - \dot{\alpha},$$

где $\dot{\alpha}$ – угловая скорость колебаний маятника.

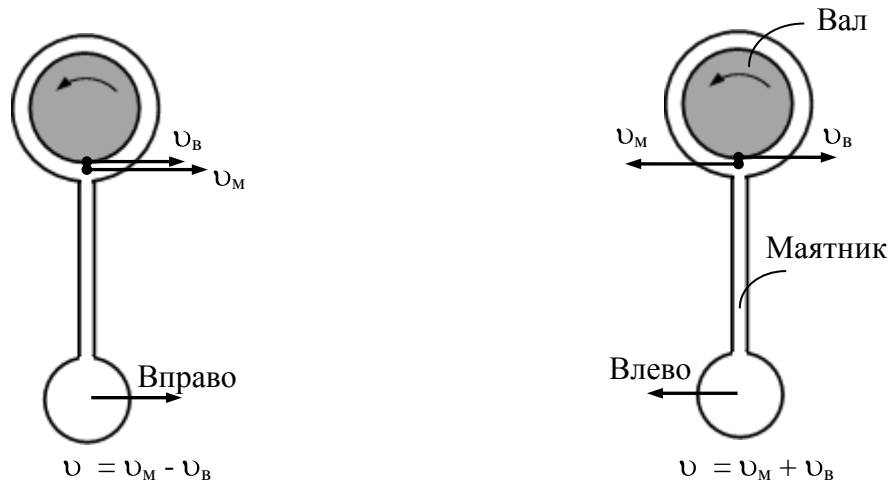


Рис. 11.15

Уравнение малых вращательных колебаний маятника можно записать в виде

$$J\ddot{\alpha} + b\dot{\alpha} + mgl_c\alpha = M,$$

где α , $\dot{\alpha}$ и $\ddot{\alpha}$ – угол отклонения, угловая скорость и угловое ускорение маятника; J – момент инерции маятника; $b\dot{\alpha}$ – момент сил вязкого трения (b – коэффициент сопротивления); $mgl_c\alpha$ – момент силы тяжести (m – масса маятника; l_c – расстояние от оси вращения до центра тяжести маятника); M – момент силы внешнего трения маятника о вал.

Сила трения зависит от относительной скорости трущихся поверхностей, но записать эту зависимость в аналитическом виде не представляется возможным. По этой причине момент силы трения выразим функцией от относительной скорости в общем виде:

$$M = M(\omega_{\text{в}}) = M(\Omega - \dot{\alpha}).$$

Если предположить, что $\dot{\alpha} \ll \Omega$ (выбрать достаточно большую скорость Ω), то функцию $M(\Omega - \dot{\alpha})$ можно разложить в ряд Тейлора и ограничиться только линейным членом разложения:

$$M(\Omega - \dot{\alpha}) = M(\Omega) - \dot{\alpha} \cdot M'(\Omega) + \dots,$$

где $M'(\Omega) = \frac{dM(\Omega)}{d\omega_{\text{в}}}$ – первая производная от момента сил по частоте.

Подставляя момент сил трения в дифференциальное уравнение, получим:

$$J\ddot{\alpha} + b\dot{\alpha} + mgl_c\alpha = M(\Omega) - \dot{\alpha}M'(\Omega)$$

или после преобразований

$$\ddot{\alpha} + \left[\frac{b + M'(\Omega)}{J} \right] \dot{\alpha} + \left[\frac{mgl_c}{J} \right] \alpha = \frac{M(\Omega)}{J}.$$

Стоящий справа постоянный член $\frac{M(\Omega)}{J}$ вызывает только смещение положения равновесия маятника, то есть линии, от которой отсчитывается угол отклонения α от вертикали. При угле отсчета от нового положения равновесия постоянный член обращается в нуль и уравнение движения примет вид:

$$\ddot{\alpha} + \left[\frac{b + M'(\Omega)}{J} \right] \dot{\alpha} + \left[\frac{mgl_c}{J} \right] \alpha = 0,$$

$$\ddot{\alpha} + 2\beta\dot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0, \quad (11.4)$$

где

$$\beta = \frac{b + M'(\Omega)}{2J}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgl_c}{J}}. \quad (11.5)$$

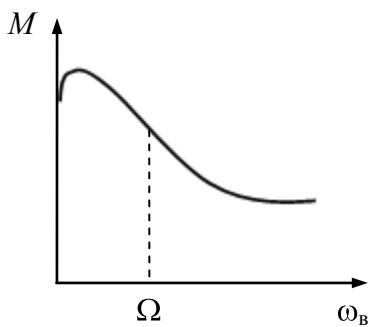


Рис. 11.16

Мы получили дифференциальное уравнение (11.4), аналогичное уравнению обычной системы с трением, но с той разницей, что коэффициент линейных колебаний β может быть отрицательным.

Момент сил внешнего трения зависит от скорости скольжения согласно графику, изображенному на рис. 11.16. Главной особенностью этой зависимости является наличие участка, на котором сила трения уменьшается с увеличением скорости, то есть значение $M'(\Omega) < 0$.

Проанализируем выражение (11.5) для коэффициента затухания β : при $M'(\Omega) = 0$ трение вала не влияет на затухание колебаний — идеальный подвес;

если скорость вращения Ω вала такова, что $M'(\Omega) < 0$ и по абсолютной величине меньше b , то $\beta > 0$, но затухание меньше, чем если бы маятник находился на подвесе, ось которого не вращалась бы;

если скорость вращения Ω вала такова, что $M'(\Omega) < 0$ и по абсолютной величине больше b , то $\beta < 0$ — система имеет отрицательное затухание, то есть возникают нарастающие колебания. Если бы функция $M'(\Omega)$ была

бы постоянной, то уравнение (11.4) было бы линейным и его решение имело бы вид нарастающих по амплитуде колебаний типа

$$\alpha = \alpha_0 e^{\beta t} \cos(\omega t).$$

В действительности функция $M'(\Omega)$ не является постоянной и уравнение (11.4) нелинейно.

Когда маятник движется вправо (за один полупериод), в одну сторону с валом, момент сил трения совершает положительную работу ($A_1 > 0$) и увеличивает энергию колебаний.

При движении маятника влево (за второй полупериод), когда вал и маятник движутся в противоположные стороны, момент сил трения вала тормозит маятник и совершает отрицательную работу ($A_2 < 0$).

В первом случае относительная скорость скольжения v меньше (см. рис. 11.15), а момент сил трения больше, чем во втором случае. За целый период работа сил трения положительная $A = A_1 - |A_2|$. Маятник получает энергию, и если она больше потерь энергии на вязкое сопротивление, то амплитуда возрастает.

При возрастании амплитуды возрастают потери на вязкое трение и возрастает относительная скорость ω_b , а значит, уменьшается момент сил трения M , и при некоторой амплитуде нарастание прекратится и возникнут устойчивые колебания с постоянной амплитудой.

Если поступление энергии больше потерь энергии, то размах колебаний увеличивается и увеличиваются потери на трение, то есть в итоге поступление и потери энергии уравниваются и также возникают устойчивые незатухающие автоколебания.

При небольших моментах сил трения эти колебания близки к гармоническим с собственной частотой маятника ω_0 , при большом трении колебания существенно негармонические.

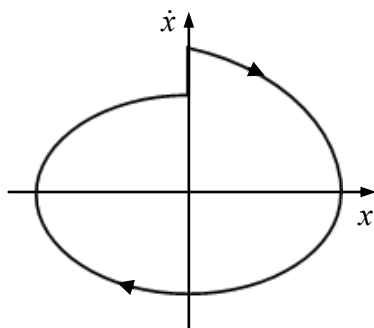


Рис. 11.17

На рис 11.17 представлена фазовая диаграмма установившихся колебаний маятника Фруда. При вращении муфты и вала в разные стороны сила трения тормозит движение маятника. При вращении муфты и вала в одном направлении сила трения подталкивает маятник. Другими словами, со стороны вращающегося вала как источника энергии на муфту маятника за каждый период колебаний действует один толчок в направлении его движения, что позволяет

поддерживать колебания маятника незатухающими. В отличие от фазовой диаграммы незатухающих колебаний (эллипса), на фазовой диаграмме автоколебаний маятника Фруда имеется характерный изгиб. Тол-

чок, действующий со стороны вращающегося вала, скачком увеличивает мгновенную скорость \dot{x} маятника, а следовательно, и его кинетическую энергию.

Пример 2. Другой механической системой, в которой существует область «отрицательного трения», является пружинный маятник, расположенный на ленте, приводящейся в движение вращающимися валами. Пружинный маятник представляет собой брусок массой m , прикрепленный с помощью пружины жесткостью k к неподвижному упору (рис. 11.18, где $v_0 = \text{const}$ и $v = \dot{x}$ – скорости ленты и бруска относительно земли).

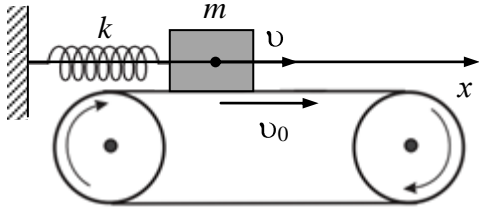


Рис. 11.18

Согласно 2-му закону Ньютона дифференциальное уравнение движения бруска можно записать в виде

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(u),$$

где x , \dot{x} и \ddot{x} – смещение, скорость и ускорение бруска; $b\dot{x}$ – сила вязкого трения (b – коэффициент сопротивления); kx – сила упругости; $F(u)$ – сила трения бруска о ленту, которая зависит от относительной скорости u трущихся поверхностей. Выразим силу трения функцией от относительной скорости u в общем виде:

$$F = F(u) = F(v_0 - \dot{x}).$$

Ограничиваясь, как и в предыдущем примере, линейным членом разложения функции $F(v_0 - \dot{x})$ в ряд Тейлора при $\dot{x} \ll v_0$, получим уравнение движения:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(v_0) - \dot{x}F'(v_0)$$

или относительно нового положения равновесия, смещенного на величину $\frac{F(v_0)}{m}$ в направлении движения ленты:

$$\ddot{x} + \left[\frac{b + F'(v_0)}{m} \right] \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0,$$

где $F'(v_0) = \frac{dF(v_0)}{du}$ – первая производная от силы трения по скорости.

Из полученного уравнения следуют выражения для коэффициента затухания и частоты соответственно:

$$\beta = \frac{b + F'(v_0)}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Если скорость ленты такова, что $F'(v_0) < 0$ (то есть сила трения уменьшается с увеличением относительной скорости u) и по абсолютной величине больше b , то $\beta < 0$ – система имеет отрицательное затухание, в ней с течением времени амплитуда колебаний будет увеличиваться.

Проанализируем движение бруска (рис. 11.19), используя известный факт, что для большинства трущихся поверхностей максимальное значение коэффициента трения покоя превышает величину коэффициента трения скольжения.

Пусть в начальный момент времени брусок движется со скоростью ленты $\dot{x} = v_0$ (то есть покоится относительно ленты). В это время сила трения, действующая на него, является силой трения покоя.

Брусок будет двигаться с постоянной скоростью, равной скорости ленты, до тех пор, пока увеличивающаяся сила упругости пружины не превысит силу трения покоя (до точки x_1). После этого брусок начнет скользить относительно ленты, сила трения скачком уменьшится до силы трения скольжения. Движение бруска продолжится в прежнем направлении, пока его скорость, равная скорости ленты, не уменьшится до нуля ($\dot{x} = 0$). Когда скорость бруска станет равной нулю, он начнет двигаться в обратном направлении (навстречу движению ленты) с ускорением, определяемым силами трения и упругости. Затем, после остановки, направление его движения опять изменится, его скорость начнет возрастать до тех пор, пока не станет равной скорости ленты (точка x_2), после чего процесс повторится – брусок начнет двигаться до точки x_1 со скоростью ленты и т.д.

На участке $x_1 \rightarrow x_2$ брусок движется под действием силы упругости и постоянной силы трения скольжения, поэтому описывается гармонической функцией с частотой, равной собственной частоте колебаний бруска на пружине. Графически участок $x_1 \rightarrow x_2$ представляет собой синусоиду.

Таким образом, в данной системе существует внутренний механизм, обеспечивающий переключение режимов движения бруска: скачкообразное изменение силы трения при начале скольжения и в момент равенства скорости скольжения бруска и скорости ленты. Когда брусок опережает ленту, сила трения замедляет движение бруска, а когда он отстает от ленты, то сила трения ускоряет его. Положительная работа силы трения покоя компенсирует потери энергии из-за трения скольжения.

Фазовая траектория автоколебаний бруска показана на рис. 11.20. Раскручиваю-

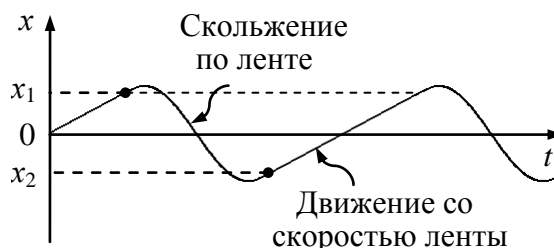


Рис. 11.19

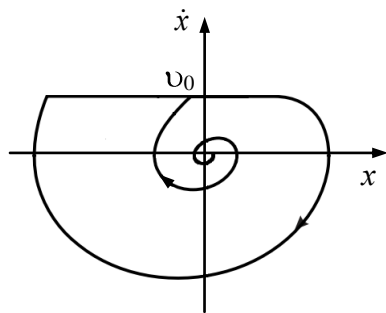


Рис. 11.20

щийся участок спирали соответствует нарастанию амплитуды, предельный цикл в виде эллипса со «срезанной» верхней частью – режиму установившихся колебаний.

Релаксационные (накопительные) колебания. Схема автоколебаний релаксационного типа приведена на рис. 11.21. В состав входят накопитель энергии, источник энергии и регулирующее устройство. Регулятор управляет накопителем и осуществляет либо подачу энергии к накопителю, либо отвод энергии от накопителя. Таким образом, так же, как в случае автоколебаний осцилляторного типа, здесь реализуется обратная связь от накопителя через регулятор к источнику энергии.

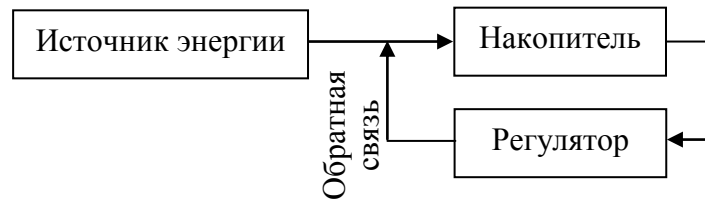


Рис. 11.21

Простейшая автоколебательная система накопительного типа показана на рис. 11.22.

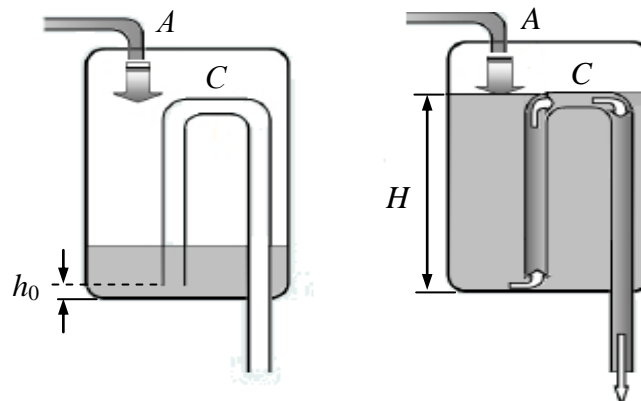


Рис. 11.22

В бак через трубу A с постоянной скоростью наливается вода, при этом уровень воды в баке h возрастает со временем по линейному закону. Через дно бака пропущена изогнутая труба (сифон) C , второе колено которой немного не доходит до дна бака. Когда уровень воды в баке и в изогнутом колене достигает верхней точки сифона (высоты H), вода через изогнутую трубку выливается из бака. Таким образом, уровень воды в баке изменяется по периодическому закону, который отличается от гармонического (рис. 11.23а).

Процессы периодические, но явно негармонические являются *релаксационными* колебаниями.

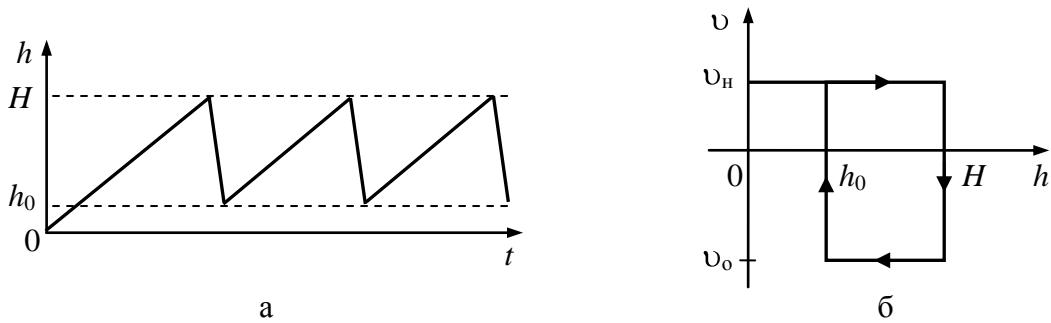


Рис. 11.23

Период колебаний уровня воды в баке зависит как от внешних условий (скорости наливания воды), так и от параметров самой колебательной системы, размеров бака, диаметра трубки сифона, ее высоты. Важно подчеркнуть, что в данной системе существует механизм, автоматически регулирующий изменение уровня воды (когда уровень воды достигает высшей точки, бак автоматически опустошается). Поэтому данная система является автоколебательной.

Фазовая диаграмма автоколебаний, соответствующая релаксационным колебаниям (см. рис. 11.23а), представлена на рис. 11.23б, где v_n – скорость наполнения бака водой; v_o – скорость опустошения бака.

Автоколебания могут играть и негативную роль, начиная от безобидных колебаний деталей кранов водопроводных систем, «ревущих» при достаточном напоре воды, до опасных колебаний крыльев самолетов, получивших название «флаттер». В 1940 году подвесной мост через реку Такома в США разрушился из-за крутильных автоколебаний, возникших под действием дувшего вдоль реки ветра.

11.5. Параметрические колебания

Параметрическими называются колебания, которые возникают в колебательной системе из-за периодического изменения одного из параметров системы. Например, для математического маятника в результате изменения длины маятника или ускорения силы тяжести; для пружинного маятника – массы или коэффициента жесткости; для физического маятника – момента инерции, массы, расстояния от точки подвеса до центра тяжести и т.д.

Типичный пример параметрических колебаний – раскачивание качелей – колебание математического маятника с периодическим изменением длины нити маятника l (рис. 11.24). Процедура раскачивания заключается в том, что человек, стоящий на качелях, периодически приседает в крайних положениях (увеличивает l) и встает в среднем положении (уменьшает l). При этом периодически изменяется положение центра тяжести. Таким способом можно раскачать качели до больших амплитуд.

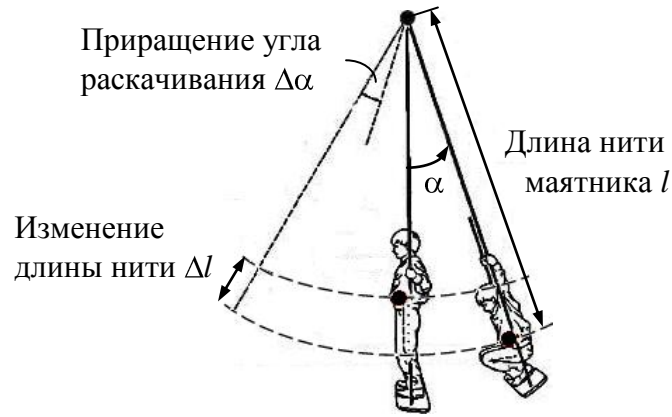


Рис. 11.24

Когда человек приседает и встает, он совершает работу, которая идет на увеличение амплитуды и энергии колебаний и компенсацию потерь механической энергии на трение и сопротивление воздуха.

Уравнение параметрических колебаний, если на осциллятор не действуют внешние возмущения:

$$\ddot{x} + p_1(t) \cdot \dot{x} + p_2(t) \cdot x = 0,$$

где $p_1(t)$ и $p_2(t)$ – параметры, зависящие от времени.

Наибольшие значения имеют часто встречающиеся в практических приложениях случаи периодического изменения параметров осциллятора, когда выполняются равенства:

$$p_1(t) = p_1(t + T_p), \quad p_2(t) = p_2(t + T_p),$$

где T_p – период изменения параметров осциллятора. В зависимости от значений функций $p_1(t)$ и $p_2(t)$ параметрические колебания могут быть *ограниченными (установившимися)* или *возрастающими (параметрический резонанс)*.

Параметрический резонанс существенно отличается от обычного резонанса при вынужденных колебаниях:

при гармоническом изменении параметров с частотой Ω резонанс возникает не только на этой частоте, но существует бесконечно много областей (именно областей, а не точек) параметрического резонанса;

линейное трение (вязкое) не приводит к исчезновению зон неограниченного возрастания амплитуды колебаний, а лишь сужает границы области неустойчивости.

Параметрический резонанс представляет очевидную большую опасность в технических системах.

Явление параметрического резонанса рассмотрим на примере математического маятника, длина которого может изменяться (рис. 11.25).

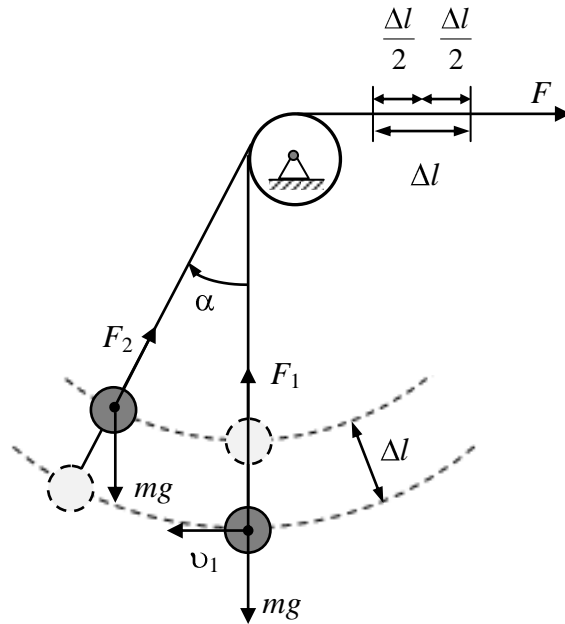


Рис. 11.25

Пусть математический маятник массой m и длиной l совершает малые колебания. Когда маятник проходит положение равновесия и имеет максимальную скорость v_1 , уменьшаем его длину на величину $\Delta l \ll l$. Затем, когда маятник отклонился на максимальный угол, увеличим длину маятника до прежней длины l . Когда маятник опять проходит положение равновесия, вновь уменьшим его длину и т.д. При выполнении таких периодических действий будем наблюдать нарастание амплитуды, то есть параметрический резонанс.

Убедимся, что при описанной последовательности действий происходит нарастание амплитуды колебаний; увеличение энергии осциллятора происходит за счет работы силы натяжения нити маятника.

Запишем 2-й закон Ньютона, когда шарик проходит положение равновесия:

$$ma_n = F_1 - mg,$$

где $a_n = \frac{v_1^2}{l}$ – нормальное ускорение, откуда сила натяжения нити

$$F_1 = mg + m \frac{v_1^2}{l}.$$

Следовательно, работа по укорачиванию нити

$$A_1 = F_1 \Delta l = \left(mg + m \frac{v_1^2}{l} \right) \Delta l.$$

Согласно 2-му закону Ньютона сила натяжения нити в момент максимального отклонения маятника:

$$0 = F_2 - mg \cos \alpha, \quad F_2 = mg \cos \alpha.$$

Удлиняя нить маятника до прежней длины, сила натяжения нити совершает отрицательную работу

$$A_2 = -F_2 \Delta l = -mg \Delta l \cos \alpha.$$

Полная работа за период

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = \left(mg + m \frac{v_1^2}{l} \right) \Delta l - mg \Delta l \cos \alpha = \\ &= mg \Delta l \left[(1 - \cos \alpha) + \frac{v_1^2}{gl} \right] > 0. \end{aligned}$$

Работа, совершенная над системой, положительная, следовательно, энергия системы возрастает, если нет потерь на трение, то неограниченно.

Резонанс в этой схеме возникает, если период изменения параметра системы

$$T_p = n \frac{T_0}{2},$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$, $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ – период собственных колебаний маятника.

Определим, на какую величину изменится максимальный угол отклонения от положения равновесия за период за счет параметрического усиления колебаний. Пусть в начальный момент маятник отклонен на угол α_0 . Дифференциальное уравнение колебаний математического маятника при длине, равной $l \pm \Delta l/2$:

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l \pm \Delta l/2} \alpha = 0.$$

Интегрируя это уравнение, можно показать, что увеличение угла отклонения маятника за период от α_0 до α_1 характеризуется формулой

$$\alpha_1^2 = \left(1 + 6 \frac{\Delta l}{l} \right) \alpha_0^2,$$

то есть энергия через период

$$E_1 = \left(1 + 6 \frac{\Delta l}{l}\right) E_0,$$

так как энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды.

Изменение энергии за период

$$\Delta E = E_1 - E_0 = 6 \frac{\Delta l}{l} E_0, \quad (11.6)$$

то есть $\Delta E \sim E_0$. Это соотношение того же вида, как и при затухающих колебаниях, только отличается знаком. Это значит, что энергия (а с нею и амплитуда) колебаний экспоненциально возрастает со временем:

$$E_n = E_0 e^{n\beta T_0}, \quad \alpha = \alpha_0 e^{0,5n\beta T_0},$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$; $\beta = \frac{1}{T_0} \ln\left(1 + 6 \frac{\Delta l}{l}\right)$.

Возрастающие колебания представлены графически на рис. 11.26.

Если в системе есть трение, то нарастание колебаний имеет место только в том случае, когда работа внешних сил больше потерь энергии на трение за период. Потери энергии на вязкое трение

$$\Delta E_{\text{тр}} = 2\lambda E, \quad (11.7)$$

где λ – логарифмический коэффициент затухания. Таким образом, условие возрастания колебаний (параметрического возбуждения) получим, сравнивая (11.6) и (11.7), в виде

$$\frac{3\Delta l}{l} > \lambda.$$

На рис 11.27 представлена фазовая диаграмма колебаний маятника переменной длины.

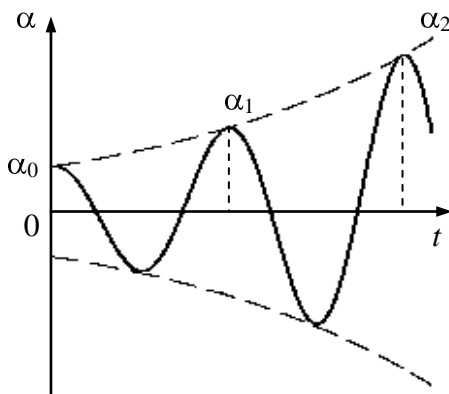


Рис. 11.26

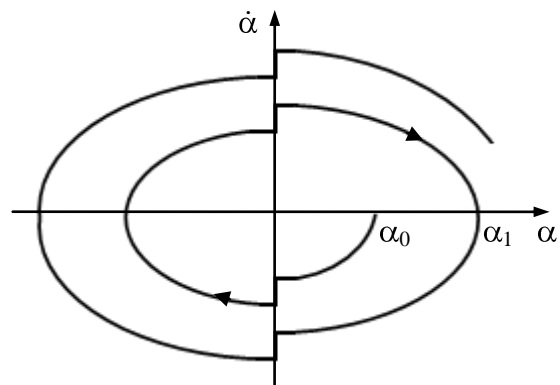


Рис. 11.27

В отличие от вынужденных колебаний, параметрические не являются самовозбуждающимися – необходимо некоторое начальное отклонение системы от положения равновесия, чтобы начался процесс параметрических колебаний.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие колебания называются нелинейными?
2. Приведите классификацию нелинейных колебаний.
3. Каковы основные причины возникновения нелинейных колебательных систем?
4. Что называется приведенной силовой характеристикой?
5. Какая приведенная силовая характеристика называется мягкой? Жесткой?
6. Изобразите графически мягкую и жесткую силовые характеристики.
7. Какие колебания называют неизохронными?
8. Приведите пример колебательной системы с мягкой силовой характеристикой.
9. Приведите вывод дифференциального уравнения нелинейных колебаний математического маятника.
10. Укажите основные аналитические методы исследования нелинейных колебаний.
11. Изобразите фазовый портрет нелинейных колебаний математического маятника и проанализируйте его вид.
12. Приведите пример колебательной системы с жесткой силовой характеристикой.
13. Приведите примеры колебательных систем с кусочно-нелинейными силовыми характеристиками. Поясните графически.
14. Проведите сравнение результатов исследования линейных и нелинейных колебаний пружинного маятника.
15. Проанализируйте приближенное решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний в нелинейных системах.
16. Проведите сравнение АЧХ линейного и нелинейного осцилляторов.
17. Укажите особенности резонанса в нелинейных колебательных системах.
18. Изобразите АЧХ для осциллятора с жесткой и мягкой квазиупругой характеристикой.
19. Что представляют собой супергармонические и субгармонические колебания?
20. Какими свойствами должна обладать колебательная система, чтобы в ней могли происходить автоколебания?
21. От чего зависят амплитуда и частота автоколебаний?
22. В чем отличие автоколебаний от свободных колебаний?
23. Поясните схематически процесс автоколебаний осцилляторного типа.
24. Проанализируйте автоколебания на примере маятника Фруда.
25. Изобразите и проанализируйте фазовую диаграмму маятника Фруда.
26. Поясните схематически процесс автоколебаний релаксационного типа.
27. Изобразите и проанализируйте фазовую диаграмму релаксационных колебаний на примере сифона.
28. Какие колебания называются параметрическими?
29. Приведите примеры параметрических колебаний.
30. Укажите особенности параметрического резонанса.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бабаков, И.М. Теория колебаний / И.М. Бабаков. М.: Дрофа, 2004. 592 с.
2. Бидерман, В.Л. Теория механических колебаний: учебник для вузов / В.Л. Бидерман. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 416 с.
3. Бутенин, Н.В. Теория колебаний / Н.В. Бутенин. М.: Высшая школа, 1963. 187 с.
4. Вульфсон, И.И. Краткий курс теории механических колебаний / И.И. Вульфсон. М.: ВНТР, 2017. 241 с.
5. Ильин, М.М. Теория колебаний: учебник для вузов / М.М. Ильин, К.С. Колесников, Ю.С. Саратов. М.: Московский гос. техн. ун-т им. Н.Э. Баумана, 2001. 271 с.
6. Нарбут, А.Н. Теория автомобиля: учебное пособие МАДИ(ГТУ) / А.Н. Нарбут. М., 2002. 71 с.
7. Пановко, Я.Г. Введение в теорию механических колебаний: учебное пособие для вузов / Я.Г. Пановко. М.: Наука, 1991. 256 с.
8. Пановко, Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара / Я.Г. Пановко. М.: Либроком, 2015. 274 с.
9. Савельев, В.В. Прикладная теория колебаний: учебное пособие / В.В. Савельев. Тула: Изд-во ТулГУ, 2005. 160 с.
10. Савельев, И.В. Курс общей физики. Т. 1 / И.В. Савельев. СПб.: Лань, 2016. 436 с.
11. Стрелков, С.П. Введение в теорию колебаний / С.П. Стрелков. СПб.: Лань, 2005. 440 с.
12. Тимошенко, С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко, Д.Х. Янг, У. Уивер. М.: КомКнига, 2007. 440 с.
13. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики: учебник / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. Москва: КноРус, 2011. 608 с.
14. Яблонский, А.А. Курс теории колебаний: учебное пособие / А.А. Яблонский, С.С. Норейко. СПб.: БХВ-Петербург, 2007. 336 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1. КЛАССИФИКАЦИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ И КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ	5
1.1. Классификация колебаний по кинематическому признаку	5
1.2. Классификация колебаний по виду возбуждения колебаний	7
1.3. Классификация колебаний по виду движения	7
1.4. Классификация колебаний по виду динамической модели	8
1.5. Классификация колебаний по виду математической модели	9
1.6. Классификация колебаний по энергетическому признаку	9
Вопросы для самоконтроля	10
ГЛАВА 2. СТРУКТУРА ДИНАМИЧЕСКОГО РАСЧЕТА КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ	10
Вопросы для самоконтроля	11
ГЛАВА 3. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСЕРВАТИВНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОЛОЖЕНИЯ УСТОЙЧИВОГО РАВНОВЕСИЯ	12
3.1. Три случая равновесия механической системы	12
3.2. Действие восстанавливающей квазиупругой силы при отклонении устойчивой системы от положения равновесия	13
Вопросы для самоконтроля	15
ГЛАВА 4. ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ	15
Вопросы для самоконтроля	20
ГЛАВА 5. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ	20
5.1. Уравнение гармонических колебаний	20
5.2. Скорость и ускорение при гармонических колебаниях	21
5.3. Восстанавливающая сила	23
5.4. Колебания энергии в гармоническом осцилляторе	24
5.5. Векторная диаграмма колебаний	26
5.6. Сложение гармонических колебаний одного направления	27
5.7. Сложение гармонических колебаний с близкими частотами. Биения	29
5.8. Гармонический анализ сложных периодических колебаний	31
5.9. Фазовая диаграмма (фазовый портрет) колебательной системы	33
Вопросы для самоконтроля	35

ГЛАВА 6. ПРИМЕРЫ ПРОСТЕЙШИХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ	36
6.1. Пружинный маятник	36
6.2. Торсионный (крутильный) маятник	40
6.3. Гравитационный (физический) маятник	42
6.4. Колебания тел, погруженных в жидкость	45
Вопросы для самоконтроля	48
ГЛАВА 7. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТЫ И СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ	49
7.1. Общее условие гармоничности колебаний	49
7.2. Способы определения частоты энергетическим методом	51
7.3. Примеры решения задач энергетическим методом	52
7.4. Метод Релея. Учет распределенных масс колебательной системы	55
Вопросы для самоконтроля	64
ГЛАВА 8. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМАХ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ	64
8.1. Дифференциальное уравнение колебания в системах с вязким сопротивлением	65
8.2. Затухающие колебания	66
8.3. Характеристики затухающих колебаний	69
8.4. Потери механической энергии при затухающих колебаниях	72
8.5. Лимитационное апериодическое движение	74
8.6. Фазовая диаграмма затухающих колебаний	75
8.7. Затухающие колебания при внешнем трении	77
Вопросы для самоконтроля	80
ГЛАВА 9. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ	81
9.1. Способы возбуждения колебаний	81
9.2. Вынужденные колебания под действием гармонической силы в системе без трения	82
9.3. Явление биений при вынужденных колебаниях	88
9.4. Явление резонанса в системе без трения	90
9.5. Вынужденные колебания в системе с вязким трением и гармоническим возбуждением	91
9.6. Анализ уравнения вынужденных колебаний с вязким трением и гармоническим возбуждением. Явление резонанса	97
9.7. Основы виброзащиты	102
9.8. Активная система амортизации	105
9.9. Пассивная система амортизации	107
Вопросы для самоконтроля	109

ГЛАВА 10. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ. СВЯЗАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ	110
10.1. Сложение гармонических колебаний, происходящих в двух взаимно перпендикулярных направлениях	111
10.2. Собственные незатухающие колебания в консервативной системе	115
10.3. Биения в связанной системе	124
10.4. Затухающие колебания в связанных системах	126
10.5. Вынужденные колебания в связанных системах	127
Вопросы для самоконтроля	130
ГЛАВА 11. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ	131
11.1. Свободные незатухающие колебания в нелинейных системах	132
11.2. Свободные колебания в диссипативных системах с нелинейным демпфированием	138
11.3. Особенности вынужденных колебаний в нелинейных системах	139
11.4. Автоколебания	142
11.5. Параметрические колебания	150
Вопросы для самоконтроля	155
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	156

**Александр Федорович Гусев
Марина Вячеславовна Новоселова**

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

Учебное пособие

Редактор Ю.Ф. Воробьева
Корректор С.В. Борисов
Технический редактор Ю.А. Якушева

Подписано в печать

Формат 60x84/16

Физ. печ. л. 10

Тираж 300 экз. (1-й завод 1–100)

Усл. печ. л. 9,3

Заказ № 41

Бумага писчая

Уч.-изд. л. 8,7

С – 40

Редакционно-издательский центр
Тверского государственного технического университета
170026, Тверь, наб. Афанасия Никитина, 22